DE INFINITIS INFINITORUM, ET INFINITE PARVORUM ORDINIBUS

DISQUISITIO GEOMETRICA

In qua, variis utriusque generis gradibus demonstratis, tum Methodi Infinitesimalis fundamenta ostenduntur, tum præcipuè PLUSQUAM INFINITA *spatia hyperbolica VVallisii, adversus nuperrimos eorundem impugnatores, vindicantur.*

AUCTORE

D. GUIDONE GRANDO CREMONENSI

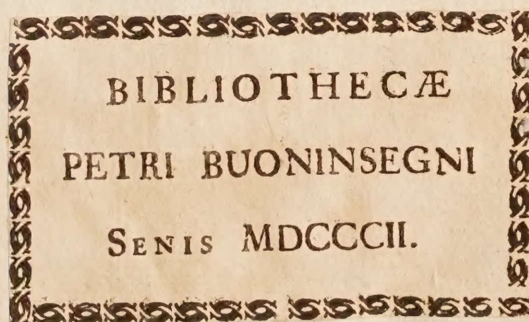
S. Theol. Doct. In Pisana Universitate Publ. Phil. Profess. ac Magni Ducis Etruriæ Theologo, & Mathematico, è Regia Societate.



PISIS, MDCCX.

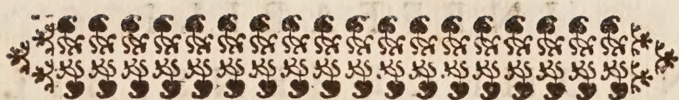
Ex Typographia Francisci Bindi Impress. Archiepisch.

De Superiorum Licentia.


BIBLIOTHECÆ
PETRI BUONINSEGNI
SENIS MDCCCII.

Digitized by the Internet Archive
in 2024 with funding from
University of Toronto

https://archive.org/details/deinfinitisinfin00gran



DEO

VERITATIS,

LUMINUM PATRI,

SCIENTIARUM DOMINO,

GEOMETRIÆ PRÆSIDI,

BONORUM OMNIUM LARGITORI

ÆTERNO, IMMENSO, IMMORTALI,

OMNIPOTENTI,

INEFFABILI,
INCOMPREHENSIBILI,
INCOMPARABILI,
UNIVERSORUM
ARCHITECTO, CONDITORI, CONSERVATORI
BENEFICENTISSIMO,
IN ÆTERNUM, ET ULTRA REGNANTI.
QUI EST
SUPER OMNIA, INFRA OMNIA, CIRCUM OMNIA,
INTRA OMNIA, EXTRA OMNIA,
IN OMNIBUS.
UBIQUE PRÆSENTI, SED INACCESSIBILI,
PER CUNCTA DIFFUSO, SED INDIVISIBILI,
OMNIA MOVENTI, SED IMMOBILI,
PRIMO, ET ULTIMO
RERUM OMNIUM PRINCIPIO, ET FINI,
IN MINIMIS MAXIMO, IN MAXIMIS SUMMO,

CIR-

CIRCULO UNIVERSITATIS

INTERMINATO,

INCIRCUMSCRIPTO,

CUJUS CENTRUM UBIQUE EST,

CIRCUMFERENTIA NULLIBI,

INFINITO

OMNIUM INFINITORUM,

ET PLUSQUAM INFINITORUM

MAXIMO,

CUJUS MAGNITUDINIS NON EST FINIS,

SAPIENTIÆ NON EST NUMERUS,

BONITATIS INFINITUS EST THESAURUS.

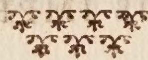
QUOD

SUÆ INFINITATIS VESTIGIA

CREATURIS IMPRESSERIT,

HOMI-

HOMINIQUE AD IMAGINEM SUAM FACTO
INFINITI PERSCRUTANDI CAPACEM MENTEM DEDERIT,
AC SUI IPSIUS,
IN ÆTERNO BEATITUDINIS LUMINE,
FACIE AD FACIEM, ALIQUANDO CONTEMPLANDI,
SPEM FECERIT, GRATIAM OBTULERIT, SORTEM PROMISERIT.
GRATI ANIMI ERGO,
OMNIUM OPERUM AUCTORI
EXIGUAM HANC OPELLAM
DE INFINITIS INFINITORUM,
INFINITEQUE PARVORUM ORDINIBUS
GUIDO GRANDUS
HOMINUM MINIMUS, MONACHORUM ULTIMUS,
SED INNUMERIS TANTÆ MAJESTATIS BENEFICIIS
ADSTRICTISSIMUS,
HUMILLIME OFFERT,
DAT, DICAT, CONSECRATQUE.

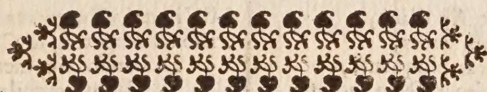


IN OPE-



IN OPERIS,

Et Auctoris Laudem.



ODE.

Reſolve nexus, tolle repagula,
Adſtricta certo limite Quantitas,
Quæ Te coarctant terminorum
Contere liberior catenas:

Attende vaſtos, quos tibi nunc ſinus
Contracta nullis finibus Area
Recludit, immenſis datura
Planitiem ſpatiis capacem.

Quondam proterva fronte quibuslibet
Geometrarum niſibus obſtitit,
Proportionis, Calculique
Impatiens tolerare frænum;

Sed, Arte GRANDI, jam nihil intereſt,
Seu limes arctas ambiat undique
Extenſiones, ſive nullam
Obtineant ſpatia ampla metam.

Parent iiſdem Legibus omnia,
Progreſſus idem, par ratio datur,
Reſpectus unus ſingulorum,
Maxima quo minimis cohærent.

Magis ſtupendum eſt, quòd ſimilis tenor
Proportionum regnat in omnibus
Vel ſummè, & infinitè parvis
Particulis, quibus aucta creſcit,

Dato minori tempore quolibet,
Ex ordinatæ fluxibus Area;
Sed amplius miranda longè
Partibus his elementa rurſus

Minora, & iſtis quæ ſimili modo
Adhuc minores particulæ fluunt,
Nec limitem Natura novit,
Lumen ut Angligenum notavit.

Non

Non difpar ordo per fimiles gradus
Deducit Infinita prioribus
Majora femper, queis deinceps
Agglomerat fpatia ampliora.

Hæc VVallis inter novit Hyperbolas,
Ad altiores quando potentias
Affurgit applicata, plufquàm
Fine fuperficiem carentem

Complexa: quidquid fivè Parentius
Contra reclamet, feu Varignonius,
Quorum cavillos elevafti
Docti Operis Faber, & Magifter.

Profundioris GRANDE Mathefeos,
Qui mente vafta materiem quoque
Excellis infinitam, & ultra
Jngenii penetras volatu.

Seu Te Poefis facrat Apollini,
Sive eruditis Hiftoriis vacas,
Stylo aut peroras eloquenti,
Dogmata feu referas facrata

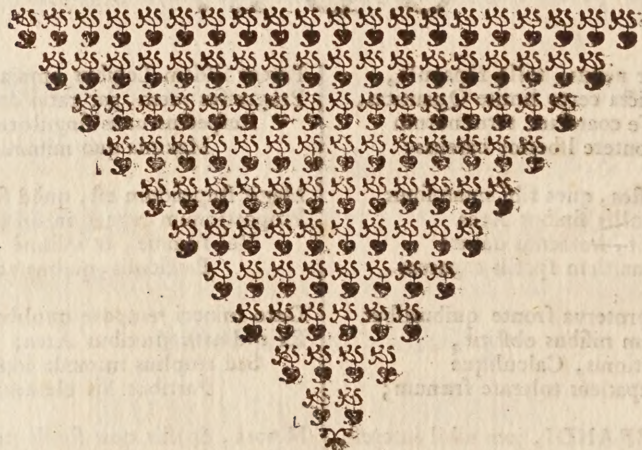
Divina Legis, feu Penetralia
Naturæ aperto in Lumine collocas,
Seu jura pandis Machinarum,
Seu Numerũ Harmonicũ reformas,

Quæ fit vagorum aut Orbita Syderum,
Aut quæ Refracti fit Radii Via
Scrutaris, implexofque ductus,
Algebra quos fpeciofa fignat;

Ubique fummus, nec fuperabilis,
Sed unus ipfum Te fuperas, viam
Geometrarum quando calcas,
Tot variis methodis abundans.

Quæfita quis Te folvere promptior,
Curvafque fili flexilis in modum
Verfare, menfurafve certas
Adiicere innumeris Figuris?

Id Viviani Ænigmata, id Hugeni
Probant Reperta, id Cycli, & Hyperbolę
Dimenfio, id meta carentum
Innumerabilis Ordo monftrat.

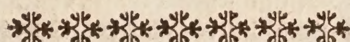


Præceptori olìm fuo, in Obfequii Argumentum, canebat
Carolus Taglini Medicinæ Doctor,
Publicus Philofophiæ in Pifano Lyceo
Profeffor.



DE OPERIS ARGUMENTO

Poeticum Præludium.



QUidquid finitum tranſcendit, [1] & undique certo
Se circumſcribi limite non patitur,
Viſum erat et noſtram pariter tranſcendere mentem,
Vireſque humani luſerat ingenii.
Auſus [2] *Ariſtoteles*, auſus (3) *Plato*, cuncta *Sophorum*
Turba [4] hoc immenſum eſt traiicere auſa vadum.
Cum

NOTÆ) *Ut lucem aliquam materiæ per ſe obſcuriſſimæ, ac Muſis penè intractabili, conciliarem, explanationem ejus aliquam in his notis ſubdere viſum fuit, & Amicorum conſilia perſuaſere: qui ſecus faciendum duxerit, eas pro non adiectis habeat, prætereatque.* Itaque (1) Infinitum *cujuſvis generis hic intelligo, ejuſque Hiſtoriam penè univerſam hoc carmine complector. Illud, tametſi noſtrum captum excedere videretur, èxplicandum ſibi ſumpſit* (2) Ariſtoteles *in lib.* 3. *phyſ. aſſerens text.* 24. *ejus notitiam ad Phyſicam pertinere, & text.* 25. *ipſius naturam ab omnibus, qui accuratè philoſophiam tradiderant, conſideratam fuiſſe affirmans, atque in primis à* (3) Platone, *quem text.* 27. *narrat*, duo Infinita *poſuiſſe*, Magnum, & Parvum: *quaſi recentioribus Mathematicis præluſerit, qui* infinitè magna, & infinitè parva *excogitarunt. Omnes denique* Philoſophi Scholaſtici (4) *de Infinito diſputare*

Cum ſcopulis (5) luctata diù, ſævisque procellis,
Irruit adverſis obvia turbinibus;
Sed tumida imbelles laſſavit ut unda lacertos,
Viribus effractis, vertere cogit iter.
Qui contra obſiſtunt, hos gurgitis ampla vorago,
Syrtibus allidens oſſa, caputque, rapit;
At pauci hinc reduces, tenuere ubi littoris oram,
Inſtabiles, greſſu ſæpe labante, ruunt;
Nec niſi tricarum (6) male olentes denique ſpumas,
Inflatis buccis, quiſquiliaſque vomunt:
Non numerare ſinus, non explorare profundum
Plumbo, non fines poſſe notare datum eſt.
Subrogat hiſce ſuos divina Mathesis (7) alumnos,
Et deſperatum fortior urget opus.
Tuque Syracuſiæ tutela, & gloria gentis
Antevolas alios, ingenioſe [8] *Senex*.
Aſſuetus vaſtam numero comprendere (9) arenam,
Non modò quæ ſiculo littore ſparſa jacet,
Sed maris, & terræ, ſtellarum, & totius orbis
Implerent quotquot grana minuta ſinum,
Quamvis erat ſpatio contermina fine carenti
Congeries, paucis non referenda notis:
Quàm facilè & pelagus, quo extenſio limitis expers
Clauditur, ingreſſus ducis in alta ratem!

Non

tare aggreſſi, ob graviſſimas, quibus involvitur, difficultates (5) hìc allegoricè expreſſas, quid profecerint, & quos fructus (6) demum inde retulerint, notius eſt, quàm hic exponi apertius conveniat. Mathematici (7) ergo Philoſophis ſubſtituti ad Infiniti contemplationem, primuſque [8] Archimedes *Syracuſius hoc vadum tentavit,* (9) *qui multitudinem arenularum, totam firmamenti etiam Pythagorici capacitatem implentium, in libro, cui titulus eſt* Arenarius, *computavit, ut Geloni Regi probaret,*

Non brevia, & cautes, non acroceraunia terrent,
Non venti, aut nymbi, aut monſtra morantur iter.
Sed noſtris ſubducta oculis vix inclyta puppis,
Metam omnem excedens, invia quæque ſecat,
Cùm ſubitò emergit ſcopulorum immenſa propago,
Quadrupla queis ratio, (10) forma tricuſpis erat.
Hic magnus Geometra jubet conſiſtere: & ultra
Quid properamus? ait: Sat mihi cuncta patent.
Jam video innumeros, quotquot ſine fine quadrantes
Succreſcunt primo, limitem habere ſui;
Nam triquetri ſeries erit omnis [11] epitrita primi:
Inde parabolici eſt area [12] nota loci
Portum igitur victor repetit, radioque magiſtro,
Tanti operis certa in littore ſigna notat.
Proximus huic, longo ſed temporis intervallo,
Ingreditur vaſtum jam (13) *Galilæus* iter;
Expedienſque Tubum (14), quo tot portenta retexit,
Uno Infinitum proſpicit intuitu.
Scrutatur numeros, (15) quotquot mens fingere poſſet,
Illorum varios comparat inde gradus.
Radiceſque [16] omnes, quadrata, cuboſque recenſens,
Nunc totidem (17), nunc ſe plura videre putat;
Nam

ret, numerum arenarum Syracuſii littoris infinitum non eſſe. (10) Porrò infinitam ſeriem triangulorum in quadrupla ratione decreſcentium, quam ſeries Tricuſpidum ſcopulorum, eandem rationem obſervantium, hoc loco exprimit, conſiderat Archimedes lib. de Quadr. Parabolæ prop. XXIII. eamque eſſe oſtendit [11] ſeſquitertiam primi trianguli, inde (12) quadraturam parabolæ determinans, eo quod in ſimilem triangulorum, quadrupla ratione decreſcentium, infinitam ſeriem reſolvatur. (13) Poſt XVIII. ſæcula Galilæus Galilæi Nobilis Florentinus Academicus Lynceus, M. D. Ethruriæ Philoſophus et Mathematicus (14) optici tubi, quo tam multa priſcis incognita ſpectacula in cęlo detexit, inventione celeberrimus (15) omnes poſſibiles numeros infinitos contemplatus eſt dial. 1. de nova Scientiæ (16) quærens, num plures in illis ſint radices, an quadrata, vel cubi. Nam (17) ex una parte totidem videntur,

 ex

Nam cuivis numero (18) ſuus eſt cubus, atque quadratũ
Cuique ſuum parili lege referre potes;
Rara ſed in numeris [19] quadrorum turma, cuborum
Rarior occurſus, non totidem eſſe ſinit.
Ergo anceps animi Vir Lynceus hæret, (20) in Uno
Quærat, an in Multis quod ſine fine vocant;
Unum etenim [21] ſibimet radix, cubus, atq; quadratũ,
Claudit inexauſto nomina cuncta ſinu.
Ambigit et titulos (22) *Æquum*, *Majuſque*, *Minuſque*
Immenſo in numero, aut mole, tenere locum.
Hos tamen evadit ſcopulos qui [23] poſt Galilæi
Signa, brevi cymba, ponè legebat iter,
Ex inſectilibus (24) componere cuncta elementis
Arte (25) *Cavallerius* nobiliore potens.
Huic licèt [26] innumeris ſint corpora conſita planis,
Plana infinitis conſita lineolis,
Ipſe figurarum [27] plana omnia comparat, omnem
Rectam hujus, rectis omnibus alterius;
Quin et ubi innumeras (28) aperit progreſſio partes,
Continuo ſeriem diminuente logo,

Non-

ex alia non totidem: [18] *primum ſuadet perpetuæ correſpondentiæ cujuſvis radicis* ***cum*** *ſuo quadrato vel cubo,* (19) *ſecundum evincit obſervatio, quòd omnes numeri* ***ſunt radices, non omnes*** *verò quadrati ſunt, aut cubici, quorum tanto major eſt in-* ***frequentia***, *quantò magis ab unitate ad altiores numeros aſcendimus:* Exhinc *dubi-* ***tat Galilæus*** (20) *annon, potiuſquàm in Multitudine, quærenda ſit Infiniti eſſentia* ***in Unitate*** (21) *quæ ſibimet quadratum, cubus, et qualibet ſui ipſius poteſtas eſt.* ***Imò*** *ſuſpicatur* (22) *titulos æqualis, & inæqualis non habere locum, ubi ſermo ſit* ***de Infinitis.*** (23) *Poſt veſtigia Galilæi, qui methodi Indiviſibilium ſpecimen dederat* ***Dial.*** 1. *cit, ubi de cylindro per hemiſpherium excavato, et Dial.* 3. *in comparatione* *ſpatii motu accelerato, & æquabili eodem tempore confecti, veniſſe viſus eſt* (24) *In-* *diviſibilium Geometriæ Auctor* (25) Bonaventura Cavallerius *Mediolanenſis, qui licèt* [26] *ſolida ex infinitis ſuperficiebus, & ſuperficies ex infinitis lineis contextas ſup-* *ponat, tamen* [27] *docet* omnia indiviſibilia *unius figuræ omnibus alterius confer-* *re, omnia ſimul plana in ſolidis, et omnes lineas in ſuperficiebus comparans. Inſu-* *per* (28) *Infinitos terminos continuò decreſcentes, nedum in ratione quadrupla*

[29) *ut*

Non modò cũ quadrupla eſt (29) Siculi ut doctrina Ma-
Prodidit, at quęvis regnet in his ratio, [giſtri
Ad certos ſemper docuit reſtringere fines, (30)
Notaque congeries integra facta fuit.
Flexilibus rectis (31) id *Torricellius* (32), inde
Gregorius [33] variis expoſuere modis.
Quodque fidẽ ſuperat, ſolidum (34] prior ille rotundũ,
Infinita acies cujus hyperbolica eſt,
Mole ſua oſtendit finito æquale (35) cylindro,
Qui à centro ad ſolidi pertinet uſque baſim.
Inde alii (36) innumeras planas, ſolidaſque figuras
[*Sluſius* (37) hos inter, (38) *Craigius*, (39) *Hugenius*]
Quamvis in immenſum quęvis ſe extenderet axem,
Ad certi ſpatii ſigna venire jubent.

Rur-

(20) *ut dudum Archimedes oſtendit loc. cit. ſed in qualibet geometrica progreſſione procederent, idem Cavallerius (apud Torricell. De Dimenſ.* Parab. *Schol poſt Lemm. XXVII.) in unam ſummam* (30) *colligere docuit, quam demonſtrat æqualem tertiæ proportionali poſt primam differentiam, & primam magnitudinem. Id verò* (31) *per flexilineæ rectarum ſibi alternatim parallellarum triangulo inſcripta elegantius probavit idem* (32) Evangeliſta Torricellius *Faventinus M. D. Ethruriæ Mathematicus ſub annum MDCXLIV. quod et aliis modis exibuit Gregorius à S. Vincentio Soc. Jeſu anno MDCXLVII. lib. 2. De Circuli Quadratura.* (34) *Jucundum verò, ac penè tum temporis incredibile ſpectaculum Geometris præbuit Torricellius, Solidum nempe acutum hyperbolicum infinitè longum, ab hyperbola circa aſymptoton converſa genitum, quod* (35) *oſtendit æquale finito cylindro eidem baſi adiacenti, ſuaque altitudine ad uſque centrum hyperbolæ extenſo, quem gignit rectangulum aſymptotico ſpatio inſcriptum in eadem converſione.* (36) *Alii deinceps, poſt Torricellium, figuras infinitè longas, tam planas, quàm ſolidas metiri auſi ſunt, quos longum eſſet enumerare, Ut ſunt* Iſaac Barrovius *in lect. Geom.* Joannes Ceva *in Geometria Motus*; Petrus Nicolas *Soc. Jeſu In Exercit. Geometr.* Antonius Lalovera *Soc. Jeſu De Cycloide*, Petrus Fermat *Opuſc. poſthum.* Jacobus Gregorius *in Geometriæ part. univerſ.* David Gregorius *in Exe c. Geom.* Georgius Cheynæus *iu Method. Fluxionum &c. tres autem ſolos carminis opportunitas exprimere conceſſit*, (37) Renatum Franciſcum Sluſium *in Miſcellan.* (38) Joannem Craigium *in method. quadrandi figur.* (39) Chriſtianum Hugenium, *a quo et Ciſſoidis Diocleæ dimenſionem habemus apud VVal-liſium in Schol. prop. XXIX. cap. V.* Mechanicæ, *& Spatii Logarithmici menſuram ad calcem Diatribæ de cauſa gravit. indicatam, quam nos in* Hugenianis, *cum extenſione ad Logarithmicas altiorum graduum, & multis id genus aliis, demonſtra-*

vimus

Rurſus arithmeticas ſeries quoque *Mengolus* (40) offert,
Quarum finis abeſt, integra ſumma datur;
Unum ubi dividitur (41) cunctis quadriſve, cubiſve,
Omnibus aut planis, aut ſolidis numeris;
Quamlibet excedit ſed tunc progreſſio metam,
Cū ratio (42) harmonica eſt, quę ſua membra ſecat.
Altiùs at penetrans pelagi tam grandis abyſſum
Auctor inexhauſtæ [43] *VVallis* Arithmeticæ
Ex Infinitis [43] PLUSQUAM-INFINITA recenſet,
Et graduum ſeries ſupputat innumeras.
Naſcitur hinc varius rerum ordo (45) fine carentum,
Horret inacceſſas mens ſtupefacta vias.
Nec ſatis: in ſummè exiguis diſcrimina (46) *Nevton*
Fermè eadem reperit, (47) *Leibnitiuſque* ſimul;

Ille

vimur. (40) *Simile quid in fractionibus numericis infinitis exhibuit* Petrus Mengolus *Bononienſis in Quadraturis arithmeticis, earum ſummam accuratè colligens, & finitam eſſe oſtendens,* (41) *quoties unitas denominatur, vel omnibus numeris quadratis, ut* $\frac{1}{4}\ \frac{1}{9}\ \frac{1}{25}\ \frac{1}{36}$ *&c.* [*quę ſeries minor eſt* $\frac{3}{4}$) *vel omnibus cubis, ut* $\frac{1}{8}\ \frac{1}{27}\ \frac{1}{64}$ *&c.* (*quæ minor invenitur* $\frac{3}{8}$) *vel omnibus planis numeris, ex ductu duorum quorumvis proximorum genitis, ut* $\frac{1}{2}\ \frac{1}{6}\ \frac{1}{12}\ \frac{1}{20}$ *&c.* (*quæ præciſe æquatur* 1.) *vel omnibus Solidis ex ductu quorumvis trium ſibi ſuccedentium productis, ut* $\frac{1}{6}\ \frac{1}{24}\ \frac{1}{60}$ *&c.* (*quæ præciſè adæquat* $\frac{1}{4}$) *At verò infinitam eſſe ſummam oſtendens,* [42] *ubi progreſſione harmonica fractiones decreſcunt, ut* $\frac{1}{2}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{5}$ *&c. At* (43) Joannes VVallis *Geom. Profeſſor Savilianus Oxonii in Arithmetica Infinitorum* (44) *Spatia* Pluſquam-Infinita *etiam commemorat prop.* 104. & 105. *quæ ſcilicet infinities ſuperant areas jam infinitas; unde* (45) *patet, eodem jure ſpatia rurſus infinities majora iiſdemmet pluſquam infinitis excogitari poſſe, & adhuc alia, a quibus hęc ipſa rurſus infinities ſuperentur, & ita deinceps ſine limite ad alia altioris ordinis infinita progrediendo. Similiter* (46) Iſaac Nevton Eques Auratus *eundem progreſſum in* Infinitè parvis *proponit, quibus alia infinities minora ſint, atque ita porrò,* neque novit natura limitem, *ut ipſe ait in Schol. Lemm. XI. ſuorum Principiorum* Mathem. *Philoſ. Et ſimile quid* (47) Godefridus Guiglielmus

Leib-

Ille tamen fluxus [48] vocat, & momenta fluentum
Quantorum punctis (49) indicat impositis;
Quartam hic (50) litterulam adiiciens ad symbola rerū,
Queis differre videt proxima quæque, notat.
Naturæ hinc secreta patent (51) mysteria utrique,
Majus et à parvis maxima lumen habent.
Namque Catenarum [52] flexus, & Elasmatis (53) arcū,
Quemve sinum pandant (54) turgida Vela notis:
Semita quæ gravium sit [55] Isochrona sponte cadentū,
Et [56] Brachystochronas discimus inde vias.
Prodit & hinc (57) varii moderatrix Regula motus,
Et vim (58) centrifugā (59) centripetamq; regens:
Nec latet illa dies, (60) breviora crepuscula cui sunt,
Nec, minimū obsistat cui mare, [61] forma ratis;
Cur-

Leibnitzius *excogitavit, cum hoc discrimine, quod Nevton quantitates infinitè exiguas* (48) Fluxiones *vocat, seu Momenta, aut momentanea incrementa, vel decrementa quantitatum, quas* Fluentes, *ideſt continua succeſſione crescentes, aut decrescentes concipit: easque fluxiones* (49) *puncto ad rei fluentis symbolum superimposito designat, ut si fluens sit* x *vel* y, *fluxiones earum sint* $\dot{x}$ *&* $\dot{y}$. *At Leibnitzius* (50) *addit litteram quartam, seu characteristicam* d, *nam has particulas infinitè parvas* Differentias *vocat, itaque ipsarum* x, *&* y *differentiæ notantur per* d x, *&* d y; *quin et ulteriores fluxionum fluxiones duplici puncto imposito per* $\ddot{x}$ *&* $\ddot{y}$ *indicat ille, per geminatum* d *exprimit iste, ut* d d x, d d y; *atque ita multiplicando punctum, vel caracterieticam cætera quantitates infinitè parva altiorum graduum denotantur* (51) *Multa hinc Physicomathematica Problemata, Veterum Methodo impervia, soluta sunt: Nempe* (52) *Curva* Catenaria, *seu funicularia, quam catena suspensa æmulantur,* (53) *Curva* Ellastica *quam laminæ Elaterum se evoluentium designant,* (54) *Curva* Velaria, *in quam tumida vela sinuantur,* (55) *Curva* Isochrona *per quam grave descendens æqualiter, æquali tempore, ad datum punctum accedit,* (56) *Curva* Brachystochrona, *sive celerrimi descensus gravium ex dato puncto ad datum punctum; Item* (57) Regulæ motuum, *utcunque vario velocitatis incremento, aut decremento procedentium,* (58) *Leges quoque* Vis centrifugæ, *hoc eſt conatus à centro recedendi in qualibet curva, quam mobile describat, &* [59] Vis centripetæ *sive impetus urgentis mobile in aliquod centrum, quacunque proportione variari supponatur in acceſſu, aut receſſu à tali centro (quarum virium utramque generali nomine* Virium centralium *comprehendit Cl. Varignonius in Actis Academiæ Regiæ, ubi præclara multa de his, & de motuum Regulis oſtendit)* [60] *Dies quoque breviſſimi, seu* Minimi crepusculi *determinata, itemque* (61) *figura Navigii*

Curvarumque licet (62) mensuras nosse, (63) recursus,
(64) Flexus, (65) Cōtactus, (66) Oscula, (67) Centra, (68) Focos.
Signaque in his radii quę lambant (69) caustica, dum lux
Sive refracta subit, sive reflexa redit;
Et quacunque basi subnixa figura rotetur,
Quas gignat punctum mobile [70] Cycloidas;
Tum quæ se evoluens, [71] post se vestigia linquat,
Dum curva amplexus deserit ipsa suos:
Et quidquid (72) *Bernulliadum* par nobile fratrum,
Aut [73] *Hospitalius*, (74) *Tschyrnhusius*, [75] *Facius*
Inseruere tuis, celeberrima (76) *Lypsia*, in Actis,
Dum methodi illustrant dogmata prima novæ.
Limitis expertum quantorum Analysta (77) repugnat
Sed *Nievuentitius*, nec satis ista probat;
Omne etenī augmentū [78] et graduū discrimina queq;
Ex Infinito reiicienda putat;

Re-

gii Minimæ resistentiæ *inter omnia, quæ in eodem fluido moveantur* (62) Curvarum rectificatio, *&* *arearum ab iis comprehensarum dimensio* (63) Puncta reversionum, *in quibus curvæ aliquot retorquentur in easdem partes, unde venerant* (64) Flexus contrarii, *ubi è concavis convexe fiunt* (65) Tangentes *cujusvis curvæ imaginabilis* [66] Circuli osculantes, *ideſt maximi, qui ad datum punctum curvæ inscribi possint.* (67) Centra *varia, ex quibus curvę describi possunt ope filorum,* (68) Foci *tum indivisibiles, tum lineares earundem curvarum.* (69) Curvę Causticæ *sive ex reflexione, sive ex refractione radiorum lucis progenitæ, quas scilicet iidem radii perpetuò tangunt.* (70) Cycloides *ortæ ex quavis curva super quamlibet aliam rotata; Item* (71) *Curvę* ex Evolutione *fili aliam curvam circunplectentis, more Hugeniano, generatæ &c.* [72] Joannes, *&* Jacobus Bernoullii *fratres, ille Chroningæ, hic Basileæ Mathem. Professores longè clarissimi.* (73) Guglielmus Franciscus Marehio de Hospitalio *insignis Geometra, qui methodum infinitè parvorum pręclara Analysi* Des infiniment petits *illustravit.* (74) Ehrenfridus VValtherus de Tschyrnhausen *celeberrimus Mathematicus, auctor Medicinę mentis & corporis, atque ingentium Vitrorum Causticorum inventor.* [75] D. Facio De Duilliers (76) Acta Eruditorum Lypsiæ *ab anno 1682. & deinceps publicata, in quibus alia complura huc pertinentia occurrunt, quæ, brevitati studentes, omittimus, cùm hactenus adducta, commendando methodi hujus pretio, abundè sufficiant* (77) *At* Bernardus Nieuventiit *in Analysi Infinitorum anno MDCVC. edita hunc ulteriorem in infinitè parva progressum reiicit & improbat.* (78) *Nam Infinito quidpiam addi posse negat.*

Rerum etiã minima (79) admittit, quæ prima vocantur,
[80] Decrementa ſed his ulteriora negat.
At tu, (81) Antennoreæ mox Palladis ornamentum,
[82] *Hermanne* huic cauſæ porrigis ultor opem,
Et repetita (83) Viri eximii argumenta refellens,
Magna et Parva [84] omnes cogis habere gradus.
Sola (85) *Varignoniũ* PLUSQUAM-INFINITA morãtur,
Quæ ſpatiis tribuit *VVallis* hyperbolicis.
Ille etenim (86) abſurdũ quiddã, atque affine Chymerę
Sub tam magnifica voce latere putat.
Tu quoque derides nomen tam grande (87) *Parenti*,
Et Geometrarum è claſſe [88] valere jubes.
Si tamen aſpiret cœptis fortuna ſecundis,
Et regat hæc trepidum lubrica arena pedem,
Dogmata [89] *VVallisii* per me inconcuſsa manebunt,
Stabit hyperbolicis (90) multiplus ordo locis.
Parvorum tamen omne genus, [91] variaſque deinceps
Magnorum claſſes, ante referre juvat, Fon-

gat, ac quadratum, cubum, cateroſque gradus Infiniti numeri reſpuit (79) *unde & conſequenter, primas quidem differentias, ſeu partes infiniteſimas primi gradus admittit, ſed* (80) *ulteriorem differentiationem, ideſt ſecundas, ac tertias differentias procul ablegandas cenſet. At* (81) *qui nunc Urbis Patavinæ ab Antennore fundatæ Cathedram Mathematicam moderatur* (82) Jacobus Hermannus *Baſileenſis, variis geometricis Speciminibus in Actis Lypſiæ, & in Ephemeridibus* Pariſienſibus, *ſuo merito, celebratus, calculi infiniteſimalis cauſam ultus eſt, &* [83] *libro, adverſus Conſiderationes ſecundas* Nievventytii, *anno* 1700 *Baſileæ promulgato,* (84) *ad omnem dignitatem evehi poſſe tum infinitè magnas, tum infinitè parvas quantitates oſtendit.* (85) *Scrupulum tamen iniecere* D. Varignonio *Spatia* Pluſquam-Infinita, *quę VVallisius inter hyperbolas altioris gradus agnovit; hęc ſiquidem* (86) *neſcioquid contradictionis involvere Varignonius credidit:* Un plus que infini, *inquit in monumentis Acad. Regiæ anni* 1706. m'a toujour paru' renfermer une contradiction (87) *Sed et* D. Parent *part.* 3. *Diſquiſ. Phyſ. & Mathem. novam hanc* Pluſquam Infinitorum *denominationem à Geometris exulare cupit:* celà etant, adieù nos plus qu' Infinis. *Deo tamen auſpice* (89) *Doctrinam VVallisii hoc in propoſito vindicandam ſuſcipiemus, &* [90] *multiplicem illum Infinitorum ordinem in ipſis hyperbolis, quas VVallisius conſideravit, neceſſariò admittendum demonſtrabimus: atque hic pręcipuus erit noſtræ hujus tractationis ſcopus,* (91) *tametſi, ad uberiorem ſcientiam, multò generaliùs hoc ipſum argumentum* De Infinitis Infinitorum, & Infinitè

B Par-

Fontibus (92) è propriis fluat ut tam nobile Verum,
Atque haustu recreet liberiore sitim.
Hinc lux [93] uberior, vis firmior, amplior usus
Accedit methodis, præsidiumque novis.
Nec jam despicies, (94) quòd tangens suppleat arcus,
Aut curvæ areolæ Zonùla recta vicem,
Et laterum innumera serie (95) polygonon habebis,
Flexa ubi continuum linea ducit iter:
Plurimaque (96) in Physicis rerum miracula disces,
Invenient certam jam paradoxa fidem:
Totũ Animal minimi ut tegit ovi angusta (97) cicatrix,
Integra ut exiguo in semine Planta latet.
Explicat implicitas (98) tantùm generatio partes,
Auctio distendit, perficit, ornat opus:
Nec, quæ succedunt priscis [99] nova semina, terrent,
Dum renovant fructus tempus in omne suos.
Nam summe exiguis (100) sine fine minora, per omnes,
Ad sensum veniunt, ducta subinde gradus.
Increpat insueti sed Apollo carminis ausum,
Nostra jubens, posita, sumere signa, chely.

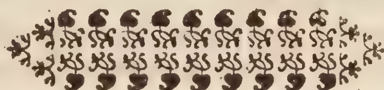
Parvorum Ordinibus *versare*, (92) *& ipsos hujus doctrinæ fontes aperire conabimur*, (93) *ad novas methodos illustrandas, & confirmandas.* (94) *Licebit deinceps arcum infinitè parvum pro recta ejus tangente sumere, & curvarũ* (95) *quadrilinea infinitè parvæ latitudinis pro rectangulis inscriptis, aut circumscriptis computare: ipsasque curvas pro* (96) *polygonis infinitorum numero laterum summè exiguorum habere (ut Galilæus, ante omnes de Circulo hoc proposuit). Multa etiã* (97) *quæ in Philosophia paradoxa videbantur, credibilia fient, ut Animalis in Ovo, & Plantæ in Semine præexistentia cum omnibus organicis partibus, quæ* (98) *evolvantur dumtaxat per generationem, & per nutritionem amplientur.* (99) *Nec terrere nos debet seminum, & fructuum, quovis anno prodeuntium, multiplicitas:* Nam (100) *admissis variis infinitè parvorum ordinibus, concipere possumus, omnia in semine contenta ex uno ad alium gradum subinde promoveri: ut nempe dum ad sensibilem magnitudinem perveniunt quæ erant in primo gradu infinitæ parvitatis, succedant ad hunc primum gradum quæ erant in secundo, & ad secundũ quæ erant in tertio, & sic deinceps. Quod valet etiam de Plantulis, que in seminulis primo semine contentis latent cum suis infinities adhuc minoribus seminulis, continentibus plantulas alias infinities minores, atque ita in infinitum.*

EX-



EXPOSITIO
CONTROVERSIÆ

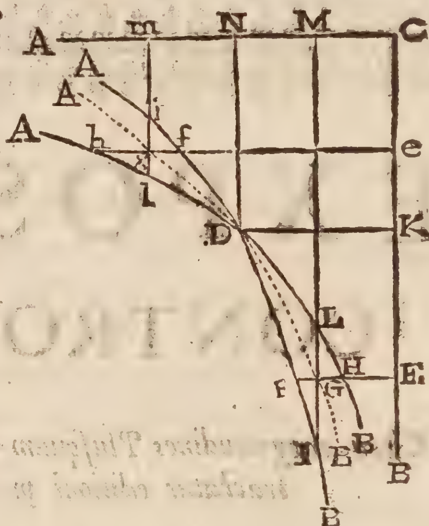
Circa magnitudines Plusquam-infinitas, quæ præsentis tractatus editioni præbuit occasionem.





Eleberrima est spatiorum plusquam infinitorum, quæ in hyperbolis altiorum graduum supra Apollonianam, ad alteram asymptoton remanent, consideratio. Hanc denominationem illis inditam voluit ante omnes alios Cl. VVallisius *Arithmet. Infinit. prop.* 104. 105. *&c. & in Mechan. cap.* 4. *prop.* 7. Quod ipsum & nos, *Hugenian. cap.* 4. *n.* 12. ab eodem VVallisio optimè observatum tradidimus, & potest ex his, quæ *ibidem cap.* 8. *n.* 11. generatim ostendimus, facillimè demonstrari.

Nimirum ex ibi dictis patet, quòd si inter asymptotos A C, C B sit hyperbola Apolloniana A g D G B, cujus nempe ea sit proprietas, ut ratio quarumvis ordinatarum D K, G E, sit æqualis rationi abscissarum à centro reciprocè sumptarum E C, C K, erit spatium post quamlibet ordinatam D K, asympto- to K B, & curva D G B indefinitè productis interjectum, magnitudinis absolutè infinitæ, quippe quæ ad inscriptum parallelogrammum C K D N erit ut 1 ad o, quę ratio est infinitè magna, seu major qualibet assignabili.



Sin autem talis hyperbola A h l D L H B iisdem asymptotis per idem punctum D inscribatur, cujus ordinatarum D K, H E ratio sit duplicata rationis abscissarum reciprocè sumptarum E C, C K: nempe cujus ordinatæ sint ut quadrata dictarum distantiarũ reciprocè accepta: tunc spatium post ordinatam K D, asymptoto K B, et curva D H B ad partes B infinitè productis interiectum, præcisè æquabitur eidem parallelogrammo C K D N, quippe ad illud erit ut 1 ad 1. Et si ordinatarum ratio reciprocæ rationis abscisarum triplicata foret, adeòut illæ harum cubis è contrario responderent, haberetur hyperbolicum spatium post ordinatam K D similiter ad partes B in infinitùm excurrens, subduplũ ejusdem parallelogrammi C K D N. Atque ubi ordinatarum ratio reciprocæ abscissarum rationis quadruplicata foret, prodiret spatium illud hyperbolicum subtriplum hujus parallelogrammi, atque ita in reliquis procedendo.

Adeo

Adeout generatim ſi ratio ordinatarum ſit ad reciprocam rationem abſciſſarum, ut x ad y (vel, quod eòdem redit, ſi ordinatarum poteſtates, ab exponente y denominatæ, reſpondeant reciprocè poteſtatibus abſciſsarum ab exponente x indicatis) ſemper ſpatium hyperbolicum poſt unam ordinatam, aſymptoto et curvæ in infinitum productis interiectum, reperiatur eſſe ad inſcriptum parallelogrammum, ut y ad $x - y$: Sic enim in prima Hyperbola Apolloniana, ubi utraque ratio, tam ordinatarum, quã reciproca abſciſsarum, æquatur, adeoque y ad x eſt ut 1 ad 1, erit ſpatium hyperbolicum ad parallelogrammum, ut 1 ad $1 - 1$, ſive ut 1 ad 0. In ſecunda hyperbola, in qua prima ratio eſt duplicata ſecundæ, fiet x ad y ut 2 ad 1, & proinde ratio ſpatii hyperbolici ad parallelogrammum, ut 1 ad $2 - 1$ ſive ut 1 ad 1. Ubi verò prima ratio ſit triplicata ſecundæ, adeò ut y manente 1, x evadat 3, erit ſpatium ad parallelogrammum ut 1 ad $3 - 1$, ſive ut 1 ad 2, atque ita deinceps.

Adeòque cùm hæc lex ſemper obtineat, utpotè fundata in ratione ſubtangentium, quæ ſemper ſunt ad diſtantias ordinatarum a centro, ut exponens poteſtatis ordinatarum y ad exponentem poteſtatis abſciſſarum x (ſive ut harum ratio ad rationem illarum) per dicta Hugenianorum *cap. 7. n. 9.* conſequens eſt, ut in hyperbolis AfDFB, ſi viceverſa abſciſsarum EC, CK ratio duplicata, aut triplicata fuerit reciprocę rationis ordinatarum KD, EF, utpotè ſi harum quadrata, vel cubi &c. ſint reciprocè ut diſtantiæ earundem à communi centro (quod in iiſdemmet hyperbolis ſupra conſideratis evenit, ſi modò ad alteram aſymptoton referantur, ut diſtantiæ in ordinatas, & ordinatæ in diſtantias mutentur, adeoque y ad x ſit ut 2 ad 1, vel ut 3 ad 1, &c. etiam ratio hyperbolici ſpatii poſt unam ex dictis ordinatis juxta ſuam aſymptoton, cum ipſa curva, infinitè productam extenſi, ad inſcriptum

paral-

parallelogrammum erit, ut y ad $x-y$ hoc eſt ut 2 ad $1-2$ (nempe ut 2 ad -1, ſive ut 1 ad $-\frac{1}{2}$); vel ut 3 ad $1-3$ (ideſt ut 3 ad -2, ſive ut 1 ad $-\frac{2}{3}$) & ſic de aliis; quæ ratio cùm major ſit ratione 1 ad o (ob conſequens minus, quàm o) ſitque 1 ad o ratio ſimpliciter infinita, conſtat majorem rationem ſpatiorum, de quibus loquimur, ad inſcripta parallelogramma eſſe *pluſquàm infinitam ;* & ideò dicta ſpatia meritò à Cl. VVallifio *pluſquaminfiniti* nomine fuiſſe appellata.

Nuperrimè tamen ſcrupulum ſuper his in Gallia ſubortum intelleximus; Nam anno 1700 D. Carrè *in methodo menſuræ ſuperficierum &c. ſect. 1. coroll. prop. 23.* cùm intuliſſet, ſpatia hyperbolica, quorum index poteſtatis ordinatarum m ſit minor unitate accepta pro exponente diſtantiarum a centro, eſſe *pluſquam infinita*: in margine monuit, ſe ita appellaſſe, ne à communi, & vulgari loquendi modo recederet, cæterùm à nonnemine opportunam rei hujus explicationem propediem expectandam: *c' eſt pour parler le langage ordinaire, que je me ſers du mot de* plus qu'infini. *Une perſonne doit nous donner au premier jour un èclairciſſement ſur cette matiere.*

Tum anno 1705 D. Parent *in Diſquiſit. Phyſ. & Mathem. tom. 1. part. 3. pag. 552.* hunc ipſum locum D. Carrè ad cenſuram vocans, poſtquàm ejus calculum reformare aggreſſus eſt, noſtrum hoc pluſquam infinitorum genus, per jocum, valere jubet: *cela ètant, adieu nos plus qu' infinis:* & velut ægrè tulerit vel denominationem illam, quaſi *vulgò uſurpatam*, à D. Carrè indicari, quam, utcunque magnificam, novam tamen, aut ſaltem inutilem eſſe ſibi perſuadet, hæc ſubdit: *Mais quelle utilitè tirerons nous de ces grands & nouveaux termes, qu' on nous donne pour des termes triviaux?*

Tan-

Tandem anno 1706 Cl. Varignonius expressè VVallisium hac in re sibi confutandum proposuit *in Monum. Phys. & Mathem. Regiæ Academiæ Parisiensis die tertia Februarii ejusdem anni:* Postquàm enim retulisset, laudatum Scriptorem Anglum, dum spatia, quæ hyperbolis, & ipsarum asymptotis interiiciuntur, ad mensuram vocat, ob dimensionem quorundam ex his spatiis per negativas magnitudines expressam, eadem *plusquàm infinita* credidisse, subdit: „ sibi magnitudinem plusquam infinitam nescio quid cnotradictionis semper includere visam fuisse; unde ad inquirendam mysterii hujus enodationem excitatum esse: atque omne mysterium evanescere debere confidit, ubi ostenderit, Authoris hujus expressionem pro spatio plusquam infinito, ne quidem spatio simpliciter utcunque infinito competere, sed tantùm finito, quod quidem spatium verè infinitum ad alteram partem residuum compleat; adeòque hyperbolas cum asymptotis suis non comprehendere spatia plusquam infinita, ut Author ille contendebat: atque hanc demum esse explicationem illam, quam D. Carrè in suo Libro de Calculo integrali super hac materia prodituram (ante sex annos scilicet) promiserat „ En ejus verba, uti habentur in dictis Academiæ monumentis anni 1706. *pag.* 15. editionis Amstelædamensis. *Monsieur VVallis cherchant la mesure des Espaces renfermez par des hyperboles, & leurs asymptotes, & aiant trouvè pour l' expression de quelques uns de ces Espaces des grandeurs negatives, a crù qu' ils ètoient plus qu' infinis. Mais comme un plus qu' infini m' a toùjour parù renfermer une contradiction, cela m' a dèterminè à chercher le dènouement de ce mystere, qui cessera d' en ètre un, dès que j' aurai fait voir que ce que cet Auteur prend pour l' expression d' un Espace plus qu' infini, n' est pas mème celle d' un infini, mais seulement d un Espace fini; qui est à la veritè le complement d' un Espace infini; & qu' ainsi les hyperboles, & leurs asymptotes ne renferment point d' Espaces plus qu' in-*

qu' infinis, comme cet Auteur l' a pretendu. C' est là l' eclaircissement qui a etè promis dans le Livre de M. Carrè sur le Calcul Integral.

Hinc post traditam doctrinam suam de quantitatibus negativis, non magnitudinem plusquam infinitam in hoc proposito denotantibus, sed prorsus finitam, ad partes tamen contrarias de more accipiendam, concludit. „ Tantum abesse, ut hyperbolæ altioris ordinis supra Apollonianam spatium plusquam infinitum comprehendant, quòd potius ipsius Apollonianæ hyperbolæ spatium censeri possit magis infinitum spatio ab aliis comprehenso, quippe illud ex utraque parte, hoc verò ab una dumtaxat parte infinitum deprehenditur „ ait enim: *D' où l' on voit que l' espace ACBGA* (hyperbolæ nimirum ordinariæ in superiori figura) *doit ètre infini de part & d' autre; & par consèquent plus infini [pour ainsi dire] que les prècèdens ACBBFA, & ACBBHA* (aliarum nempe hyperbolarum) *qu' on vient de voir ne l' ètre, que par chàcun un còtè. Donc il s' en faut bien qu' ils ne soient plus qu' infinis.*

Nos autem Cl. VVallisii doctrinam, & expressionem vindicantes, ostendemus, revera hyperbolas altioris ordinis supra Apollonianam, ex una parte licet finitum spatium comprehendant, ex alia tamen usqueadeò spatium plusquam infinitum continere, ut etiam infinities majus sit spatio ab Apolloniana hyperbola contento: adeòut spatium Apollonianæ hyperbolæ, licèt utraque ex parte jam infinitum, quantumvis adhuc multiplicatum, semper minus ostendatur quovis spatio ad unam asymptoti partem ab altioribus illis hyperbolis contento, & qualibet etiam aliquota ipsius parte: ac demum ita comparari debere spatium infinitum hyperbolæ Apollonianæ ad ea spatia, quæ ab altioribus comprehenduntur, ut quædam finita quantitas ad infinitam, vel ut o ad 1. Usque adeò verum est, spatia illa plusquam infinita censeri debere, & VVallisianam

nam illam denominationem, velut optimo fundamento nixam subsistere, meritòque adhuc ab omnibus esse retinendam.

Enimuerò hoc ipsum, quod nos de spatiis illis hyperbolicis demonstraturos recepimus, sufficere, atque illud unū requiri, ut spatium quoddam plusquam infinitum habeatur, fassus est Auctor Historiæ ejusdem Academiæ Regiæ anni 1706 in hujusmet controversiæ enarratione, & Varignonianæ dissertationis recensione, optimè animadvertens: ,, Plusquam infinitam non censeri magnitudinem, quæ alia infinita utcunque sit major, cùm infinitæ magnitudines, juxta quorumvis numerorum rationem, aliæ aliis majores, aut minores esse possint, absque eo quòd ordinem infinitorum excedant, perinde ac finitæ quantitates juxta quamvis rationem auctæ, vel imminutæ, finitorum ordinem non transcendunt; sed illas plusquam infinitas magnitudines demum censendas, quæ ab infinitorum ordine emergentes, ad ordinem superiorem fuerint elevatæ, ut accidit finitis magnitudinibus, ubi ad ordinem infinitorum transierint. ,, En ipsa eloquentissima verba Historici prælaudati *pag.* 60. Batavæ editionis: *Car ce qu' on nomme ici plus qu' infini, ce n' est pas une grandeur infinie plus grande qu' une autre infinie: les grandeurs infinies peuvent ètre plus grandes ou plus petites les unes que les autres, selon tous les rapports possibles des nombres, & cela sans sortir de l' ordre de l' infini, de meme que les grandeurs finies ne sortent pas de l' ordre du fini pour varier entr' elles selon tous ces rapports. Mais ce qu' on entend par des grandeurs plus qu' infinies, ce sont des grandeurs qui etant sorties de l' ordre de l' infini doivent s' elever à un ordre superieur, comme font les grandeurs finies lorsqu' elles passent à l' ordre de l' infini.*

Idipsum & Auctor Diarii Parisiensis *in suplemento ultimi Februarii* 1708, hanc historiam, & controversiam recensens, repetit totidem penè verbis: deinde adjicit ,, Quòd si plus-

quàm infinitæ magnitudines admittantur, ordo quidam altior ipsomet infinito erit excogitandus, atque inducendum, non modò unum infinitum simpliciter alio majus, sed genus quoddam magnitudinum, quæ Infiniti ordinem prætergressæ ad superiorem alium ordinem eleventur „ *Si ce, qu' on appelle dans cet article* Grandeurs plus qu'infinies, *avoit lieu, il faudroit reconnoitre un ordre plus elevè que celui de l' infini, & admettre non pas simplement un infini plus grand qu' un autre, mais des Grandeurs sorties de l' ordre de l' infini, & elevèes à un ordre superieur*. Tum notabilem hanc animadversionem subiicit, qua „ non omnino reiiciendas plusquàm infinitas magnitudines (adeòque nullam contradictionem, qualem in ipsis Varignonius fingit, absolutè involvere) ex Geometriæ transcendentis principiis, varios infinitorum ordines agnoscentis, apertè innuit: verùm in hoc speciali proposito hyperbolarum VVallisii, omne plusquam infinitum jure à Varignonio reiici statuit, quippe illarum expressio à VVallisio adducta, ne quidem pro simpliciter infinito, (nedum non pro plusquam infinito) sed purè finito spatio fuerat accipienda „ *Quand les principes de la Geometrie transcendante ne permettroient pas de rejetter absolument l' idèe de differens ordres d' infinis, M. Varignon auroit toujours raison de la rejetter dans la question presente. Et en effet il fait voir, que ce que M. VVallis a pris pour l' expression d' un espace plus qu' infini, n' est pas même l' expression d' un espace infini; l' espace exprimè etant purement fini*.

Me igitur operæ pretium facturum existimavi, si rem ipsam altiùs repetens, varios tum Infinitorum, tum infinitè parvorum ordines, quos profundior Geometria, quæ nunc temporis in usu est, ac per infinitè exigua magnitudinum elementa procedere solet, ex omnium fermè Geometrarum, qui ejus principia degustaverint, confessione agnoscere necessariò debet, demonstrare, & quàm dilucidè fieri poterit, exponere aggrederer, speciatim verò Hyper-

perbolarum VVallisii *plusquam infinitarum* non unam, sed multiplicem purè geometricam demonstrationem in medium afferrem, quæ nullis Calculi ambagibus imponere cuiquam possit, nullisque cavillationum technis eludi: adeòut non magis excipere queat Varignonius, expressionem horum spatiorum invertendam, et ad aliam partem, negativo in positivum transeunte, ac plusquàm infinito in purè finitum converso, esse sumendam, quàm si contenderet, quæ de Triangulis ostendit Euclides, esse de Circulis, aut Parallelogrammis intelligenda.

Veniam, ut spero, dabit conatibus nostris Cl. Varignonius, cujus præclarissimæ famæ, quam sibi tot mechanicis, ac geometricis, & analyticis egregiis speciminibus, immortali planè memoria dignissimis, peperit, nihil idcircò detractum volo, dum Collegæ nostri VVallisii honorem, & Illustrissimæ Regiæ Societatis nostræ Decus, ac Veritatis ipsius pretium hac in parte vindicare contendo: simulque tum ipse, tum profundiores alii Geometræ permittent, ut me vel Tyronum captui accomodans, doctrinam hanc minutissimè exponam, ea ipsa, quæ tamquam vulgatissima habentur, ex suis velut principiis exactè demonstrans, ne quid fortassis obrepat, quod minùs assuetis ad hæc profundiora Matheseos mysteria mentibus ullam falsitatis suspicionem possit ingerere; liberum enim cuilibet futurum erit, ut ea quæ facillima, & sibi notissima sunt, statim transiliat, atque in his dumtaxat, quæ propositæ controversiæ punctū propiùs concernunt, examinandis, tempus insumat.

Hortandus interim mihi est Lector Geometra, ne inter inanes, ac nulli usui profuturas meditationes, nostram hanc de Natura Infiniti, variisque ejus classibus, quas pauci hactenus animadvertere, ac distinguere potuerunt, collocandam censeat; nam præter egregios fructus, quos probè instituta mens ex hujusmodi considerationibus ad Divinorum contemplationem sibi derivare facilè potest, quatenus

tenus nihil æquè idoneum est in Dei Opt. Max. ejusque summarum perfectionum notitiam (quantùm naturæ viribus assequi datur) nos promovere, atque in ejus incomprehensibilis Sapientiæ, omnemque, vastam licèt, ac ultra quoslibet, terminos extensam ideam, immenso intervallo superantis Potentiæ admirationem inducere, ac seria Infinitorum discussio: præter hos, inquam, egregios sanè, ac præstantissimos fructus, aliosque non absimiles ad vitam rectè, moderatèque instituendam pertinentes, quibus vel solis quidquid ad Infiniti Naturam enucleandam, ejusque proprietates aperiendas collimat, satis commendaretur, innumera ex eodem hoc fonte in universam Mathematicam, & Philosophiam profluere emolumenta is unus diffiteri poterit, qui iisdem percipiendis impar extiterit; Nam, exempli causa, Circuli, & Hyperbolæ quadratura, quæ tot modiis tentata, quoslibet Geometrarum conatus per tam multa sæcula pertinaciter elusit, tandem ab infinita terminorum serie pendere deprehensa est, ut in nostro Libello *Quadraturæ Circuli, & Hyperb.* anno 1703 Pisis edito geometricè demonstravimus. Innumeri naturales effectus in Physica adhuc ignoti manent, quòd infinitam principiorum seriem, à qua fortasse dependent, ignoremus. Tota Geometria Infinitè parvorum methodo nunc perficitur, & in immensùm ultra fines à Veteribus constitutos ampliatur: perfectioni autem tam nobilis Scientiæ connecti et perfectionem Philosophiæ, atque hanc pari passu cum illa in dies promoveri, quis nesciat? Verùm hęc alibi fusiùs, & opportuniùs: ad rem ipsam veniamus.



DE



DE INFINITIS INFINITORUM, ET INFINITÈ PARVORUM ORDINIBUS.



DEFINITIO I.

RATIONES assignabiles dicuntur, quibus æquales, aut quamlibuerit proximas, per positivos numeros, possumus exhibere.

SCHOL. Comprehendit hæc definitio etiam rationes asymetrarum magnitudinum, ut diametri ad latus quadrati, vel lateris trianguli æquilateri ad ejus perpendiculum &c. quæ licèt numeris exprimi nequeant, ostenduntur tamen quibusdam numericis rationibus majores, quibusdam minores, adeòque intra certos limites continentur, intra quos etiam possumus propositæ rationi quamlibuerit proximam per numeros exhibere, juxta ea, quæ demonstravimus *in Hugenianis cap.* 3. *n.* 3.

DEFI-

DEFINITIO II.

Magnitudines absolutè Finitas voco, quas vulgò tractamus, quæque ad similem nobis notissimam quantitatem, in nostro saltem corpore determinandam, rationem assignabilem obtinent.

SCHOL. Quaslibet magnitudines digito, palmo, pede, vel ulna, nimirum humani corporis partibus, ad certam quamdam mediocrem quantitatem, inter tot varias, publica auctoritate, taxatis, metiri omnis natio consuevit: itaque eodem modo ad corporis nostri molem cætera corpora, ad nostrã superficiem cæteras superficies, ad nostram altitudinem cæteras lineas, ad angulum, quem altitudo nostra cum horizontali recta comprehendit, cæteros rectilineos angulos, ad nostrum pondus cæterarum rerum gravitates, ad nostram vim cæteras potentias, ad nostræ vocis tenorem cæteros sonos, atque ita de reliquis, referre non immeritò possumus, velut ad magis obviam, magis naturalem, nobisque notissimam mensuram, ad quam certè quælibet finitæ quantitates ejusdem generis, quas vulgò tractamus, assignabilem aliquam obtinent rationem.

DEFINITIO III.

Magnitudines absolutè Infinitas voco, quæ ad finitam quamlibet sui generis magnitudinem rationem habent majorem qualibet assignabili.

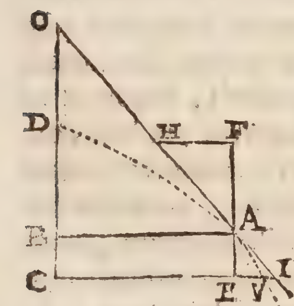
SCHOL. Non contendimus, talem aliquam magnitudinẽ reipsa existere, vel aliquando extituram, sed ipse progressus quantitatum, certa quadam lege, crescentium, menti nostræ occasionem præbet, illas sine limite augendas, & ultra quamvis datam magnitudinem ampliandas concipiendi, quarum itaque ratio ad quamlibet finitam sui generis quantitatem, major semper, & major evadat, quàm quælibet

libet ratio aſſignabilis: ita conica ſuperficies, ejuſque ſectiones parabolicæ, & hyperbolicæ, ſuapte natura infinitæ ſunt, quatenus ſemper augeri, extendique ulterius, adeòque omnem finitam ſuperficiem ſuperare concipi poſſunt; licèt interim quidquid ex illis determinatè acceperimus, ſemper nonniſi finitum futurum ſit, in eo autem dumtaxat, quod accipiendum ſupereſſet, tota Infinitas lateat. Neque enim fieri poteſt, ut magnitudo undique circumſcripta, & limitata, pro abſolutè infinita habeatur: quarè licèt parabolæ, exempli cauſa, axis in infinitùm protenſus ſit abſolutè infinitus, non ideò concipi poteſt, velut longitudo binis punctis, quantumvis diſtantibus, intercepta, ſed ex una dumtaxat ſui parte, nempe ad punctum verticis, unde originem ſuam ducit, determinata, ad aliam verò partē termino, & fine carens, utpotè ſine limite ſemper augenda.

DEFINITIO IV.

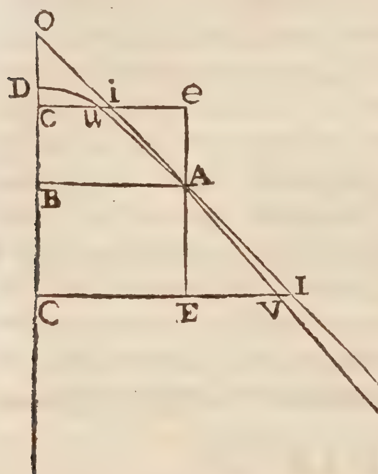
Magnitudines abſolutè infinitè parvas intelligo illas, quæ ad finitam ſui generis magnitudinem habent rationem minorem qualibet aſſignabili.

SCHOL. Has magnitudines infinitè parvas Cl. D Leibnitzius *Differentias*, vel Elementa variabilium quantitatū vocavit: Illuſtriſs. Eques Nevvtonus *Fluxiones*, ſeu momentanea incrementa, aut decrementa magnitudinum, continuo quodam fluxu creſcentium, aut decreſcentium, antea appellaverat: Multis placet eaſdem *Infiniteſimas* magnitudinū partes dicere; quæ ut intelligantur, concipiatur recta BA per axem DC curvæ DAV, ſibimet parallella manens, moveri, atque interim continuò creſcat, aut minuatur, prout opus eſt, ut



ad

ad curvæ perimetrum altero extremo pertingat; ducta ergo A E axi parallela, si imaginemur [licèt, ad confusionem vitandam, has aliquantulum disitas figura exprimat] ordinatam B A venisse in situm, quàm maximè intelligere possimus, eidem proximum, & jam congruere rectę C V: ejus incrementũ, aut decrementũ V E erit differẽtia infinitè parva ordinatæ B A, similiterque arcus A V differentia erit infinitè parva curvæ D A V, itidemque erit B C differentia infinitè parva axis D B, nec non areola A B C V, duabus ordinatis infinitè proximis intercepta, dicetur differentia infinitè parva areæ D A B; manifestum enim est, posse concipi, ut tam prope accedant invicem ordinatæ B A, C V, ut ratio tam E V ad B A, quàm C B ad B D, nec non V A ad A D, & spatii A B C V ad A D B, minor evadat quavis proposita ratione assignabili; minuitur enim hoc continuo accessu ordinatarum A B, C V, quælibet ex dictis quantitatibus E V, C B, V A, A B C V in infinitum, ac tandem penitus evanescit, ubi utraque ordinata perfectè congruit; quare priùs oportet, ut minor fiat qualibet finita sui generis magnitudine assignabili, ideoque ad datum consequens rationem subinde acquirat, in hoc continuo fluxu, minorem qualibet assignabili. Similiter rotata curva D A V circa axem D C, ostenderetur, rotundæ superficiei per curvæ rotationem genitæ differentiam, ab arcu A V infinitè parvo procreatam, esse pariter infinitè parvam: nec non rotundi solidi portionem, planis per B A, & C V infinitè proximis æquidistanter ductis interceptam, esse infinitè pariter exiguam, &c.



Cæ-

Cæterùm hìc pariter obſervandum eſt, nec magnitudines has infinitè parvas concipi debere, velut determinatas, aut determinabiles quaſdam portiones quantitatum, quæ certam, & definitam parvitatem obtineant; quaſcumque enim portiunculas linearum, ſuperficierum, aut corporum (itidemque virtutum, celeritatum, angulorum &c.) acceperimus, aut deſignaverimus, hæ ſemper reipſa finitæ erunt, non infinitè parvæ: itaque non ſunt intra certos terminos, quantumvis proximos, coarctandæ, ſed concipiendę ſunt ex una dumtaxat parte, ad ſummùm, limitatæ (ut CB fixum terminum habet in B, VA fixam originem habet in A, area BAVC adiacet fixæ lineæ AB, & corpuſculum, ex illius converſione circa BC deſcriptum, adhæret fixo circulo radii BA) ex altera verò parte fixum limitem non habentes, ſed alteri extremo ſemper propiùs accedentem, ut continuo fluxu accedit punctum C ad B, & V ad A, & CV ad BA, intervallo utriſque interpoſito, infra quamlibet aſſignabilem magnitudinem, perpetuò decreſcente. Aut etiam utrumque extremum ſibi invicem accedere concipi poteſt, ut puncta E, V ſibi ſemper propiora fiunt, neutro fixam poſitionem ſervante, dum lineolam EV infinitè parvam intercipiunt. Unde hæ magnitudines ſemper ut decreſcentes, ac perpetuò diminuendæ accipi debent, ut ſuo, infra omnem aſſignabilem quantitatem, decremento, ſub ratione infinitè parvarum, ſive infiniteſimarum partium intelligi poſſint.

DEFINITIO V.

Duarum quarumlibet magnitudinum, ſi prima ad ſecundam habuerit rationem majorem qualibet aſſignabili, adeòque, convertendo, ſecunda ad primam ſit in minori ratione, quàm qualibet aſſignabilis, dicetur prima infinita reſpectu ſecundæ, ſive infinities maior illa: ſecunda verò infinitè parva reſpectu primæ, aut infinities minor eadem.

SCHOL. Hoc modo etiam finitæ magnitudines respectu quidem absolutè infinitarum erunt infinitè parvæ, at respectu earum, quæ sunt absolutè infinitè parvæ, erunt ipsæmet infinitæ; Quare patet, nomina hæc *Infiniti*, aut *Infinitè parvi*, relativa potius esse, quàm absoluta, licèt communi loquendi modo obsecundans, *in Defin. III. & IV.* absolutè acceperim hæc vocabula, quia tunc respectus saltem ad ordinarias finitas quantitates subintelligebatur; quemadmodum etiam *Magnum & Parvum* termini sunt semper relativi, sed quoties ad ordinariam, & magis communem alicujus generis mensuram referuntur, absolutè solent enunciari, magnus aut parvus homo, magnus aut parvus canis, magna vel parva domus, subintelligendo respectu hominis, canis, aut domus mediocris, & magis usitatæ quantitatis.

DEFINITIO VI.

Ejusdem inter se ordinis, aut gradus magnitudines sunt, cùm earum ratio est assignabilis: Cùm verò hujus ad illam major, aut illius ad hanc minor est ratio, quàm qualibet assignabilis, tunc gradus, aut ordinis hæc superioris, illa inferioris dicetur respectu alterius.

SCHOL. Hinc ex quantitatibus Infinitè parvis, aut Infinitis, vel Finitis, primæ inferioris gradus sunt respectu cæterarum, secundæ sunt ordinis superioris ad reliquas, tertiæ superioris quidem gradus aut ordinis respectu priorum, at inferioris respectu secundarum: inter se autē ejusdem ordinis aut gradus esse constat finitas quaslibet magnitudines. An verò magnitudines omnes absolutè infinitę, vel infinitè parvæ semper ejusdem inter se ordinis censendæ sint, an potius diversi gradus in utroque hoc magnitudinum genere reperiri queant, id in præsenti disquisitione detegendum erit: Clarissimis viris *Nevvtono, Leibnitzio*, utrique

Ber-

Bernoullio, *Hospitalio*, *Hermanno*, ipsique etiam *Varignonio* sua constat diversitas ordinis in infinitè exiguis, quippe fluxionum fluxiones, & differentiarum differentias secundas, tertias, quartas &c. in Geometriam invexerunt, ut ex ipsorum monumentis passim liquet; *Bernardus* autem *Nievventytius* in sua *Analysi Infinitorum*, non esse ultra primas differentias progrediendum, pluribus contendit, adeòque infinitè parvas magnitudines ad eundem semper ordinem spectare arbitratur. Iisdem supra laudatis egregiis Viris (præter Varignonium & Nievventytium] placuisse, ut ordinis, & gradus diversitas etiam inter quantitates infinitè magnas admitteretur, ex eorum modis, & loquendi formulis patet, ut ex celebri Leibnitzii dicto, *Actor. Lypsiæ pag.* 86. *Et infiniti sunt gradus, tam infinitorum, quàm infinitè parvorum*; Idque VVallisii præsertim exemplo factum est, qui omnium primus spatia *Plusquàm infinita* in Hyperbolis altiorum graduum detexit: hæc enim nihil aliud sunt, ut videbimus, quàm infinitæ magnitudines superioris ordinis, quæ nimirum adhuc respectu quantitatum absolutè jam infinitarum sunt infinitæ, sive illis infinities majores, quemadmodum differentiæ secundæ, vel tertiæ Leibnitii sunt quantitates infinitè parvæ ordinis inferioris, sive infinities minores ipsismet primis differentiis, quæ jam absolutè erant infinitè exiguę. Et sanè, mirum est, Cl. Varignonium *in monum. Acad. Reg. anni* 1706 hęc VVallisii spatia *plusquam infinita*, velut contradictionem involuentia, reiicere, dum secundas, & tertias differentias, adeòque partes ipsismet infinitesimis infinitè minores [quę *plusquam infinitè parvæ* dici possent] tam frequenter admittit, ubi de viribus centralibus, de radiis osculi, aliisque similibus disserit. Enimverò, nonne ipsę finitę quantitates infinities continent primas differentias, & hę rursus infinities continent secundas, secundæ autem tertias? ergo multitudo secundarum differentiarum in ipsamet finita magnitudine

eſt pluſquam infinita, & tertiarum differentiarum multitudo in ipſis infiniteſimis primi ordinis pluſquam infinita eſt, infinities verò pluſquam infinita in magnitudinibus finitis, ac multò magis in quantitatibus abſolutè infinitis: adeò ut quævis magnitudo ſi continet infinitas numero primas differentias, utique contineat pluſquam infinitas differentias ſecundas, & in altiori adhuc infinitatis gradu contineat differentias tertias; & in multò altiori quartas, atque ita deinceps. Quidquid id eſt, non abs re fuerit, hypotheticè ſaltem, hoc vocabulum interim definire, ut certa, & diſtincta controverſę rei notio habeatur.

DEFINITIO VII.

Siquæ magnitudines infinities majores oſtendantur aliis magnitudinibus jam abſolutè infinitis, adeòque ordinis ſuperioris ad ipſas probentur, illæ PLUSQUAM INFINITÆ poterunt appellari.

SCHOL. Hoc enim nomen, ipſis à VValiſio quondam inditum, alii deinceps Clariſſimi Geometræ retinuerunt, ut Renatus Franciſcus Sluſius, David Gregorius, Joannes Craigius, & inter Gallos, quibuſcum nunc inſtituitur diſputatio, celeberrimus Marchio Hoſpitalius *in Tractatu Analytico Sectionum Conicarum lib. 5. prop. 14. coroll. 2. n. 3.*

Fateor tamen, quodlibet infinitum poſſe adhuc *pluſquam infinitum* cenſeri, quia cùm nullus ſit minimus infiniti gradus, quolibet infinito propoſito, ſemper aliud infinities minus reperiri poteſt, cujus reſpectu illud ſit pluſquam infinitum, ut conſtabit ex dicendis infra *prop.* 10, ubi ipſomet aſymptotico ſpatio hyperbolæ Apollonianæ (cujus reſpectu VValliſius altiores hyperbolas pluſquam infinitas cenſuit) aliam aream infinities minorem, licèt adhuc abſolutè infinitam, invenimus, cujus reſpectu ipſamet ordinaria hyperbola ſpatium pluſquam infinitum cum aſymptoto continet.

PRO-



PROPOSITIO I.



Magnitudinum ejuſdem ordinis A, & B, tam ſumma A†B, quàm differentia A−B (poſito nempe, quòd A, juxta aliquam aſſignabilem inæqualitatis rationem, determinatè ſit major, quàm B] ejuſdem pariter cum alterutra ipſarum eſt ordinis.

Erit enim, *ex defin. 6*, A ad B in aliqua ratione aſſignabili, putà *m* ad *n*: quare & componendo A†B ad B, & dividendo A−B ad B, erit in ratione pariter aſſignabili, *m*†*n*, vel *m*−*n* ad *n*, ideoque, *ex eadem definitione*, tam A † B, quàm A−B ejuſdem cum B, vel A, eſt ordinis. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIUM. Hinc finitum additum finito non facit infinitum: nec duæ, vel tres partes infinitè parvæ finitam magnitudinem aggregant: nec binæ, vel aliquot infinitæ quantitates ejuſdem ordinis ullam magnitudinem pluſquam infinitam ſupra talem ordinem efficiunt.

PROPOSITIO II.

Per quemlibet finitum numerum m *quævis magnitudo A multiplicetur, aut dividatur, tam productum* m *A, quàm quotiens* $\frac{A}{m}$, *intra eundem ordinem cum ipſo A conſiſtet.*

Nam, *ex praecedenti*, A † A † A † A &c. quoties libuerit, ejuſdem ſemper cum ipſo A eſt ordinis; atqui multiplicatio, ut patet, non eſt niſi quædam repetita ejuſdem quantitatis additio, ergo productum *m*A ejuſdem ordinis erit cum ipſo A. Simili ratione $\frac{A}{m}$, multiplicatum per *m*, intra

tra eundem ordinem remanebit, sed tunc evadit ipsum A, itaque $\frac{A}{m}$ ejusdem est ordinis cum ipso A; quare &c.

COROLL. Hinc non potest juxta finitum numerum toties sumi quantitas infinitè parva, ut finitam quantitatem aliquando efficiat: idem dic de finita respectu infinitę, ac de qualibet infinita respectu plusquam infinitæ: idemque vicissim de divisione, ex qua numquam magnitudo ad inferiorem ordinem deprimitur, dictum esto.

PROPOSITIO III.

SI ratio magnitudinum A ad C major sit qualibet assignabili, non minor erit ratione 1 ad 0.

Esto siquidem minor, si fieri potest, puta eadem quæ 1 ad $\frac{1}{m}$ majorem quàm 0 (intelligendo per *m* quemlibet numerum, quantumvis magnum, qui dividendo unitatem, efficiat fractionem $\frac{1}{m}$ quantumlibet parvam) ergo quia est ut *m* ad 1, ita 1 ad $\frac{1}{m}$, erit ratio A ad C eadem quæ *m* ad 1, adeòque non major qualibet assignabili, contra hypothesim; ratio igitur A ad C non minor est ratione 1 ad 0. Quod erat &c.

COROLL. I. Quælibet magnitudo inferioris ordinis, collata magnitudini ordinis superioris, ut merum nihil, in omni rigore, æstimanda est; si enim illa ad istam compararetur, ut aliquid majus nihilo ad unum quidpiam, hæc haberet ad illam rationem minorem quam 1 ad 0, cujus oppositum demonstravimus.

COROLL. II. Et ideò nulla inferioris ordinis magnitudo addita magnitudini ordinis superioris, vel ab eadem detracta, hanc auget, aut minuit, sed ejusdem quanti-

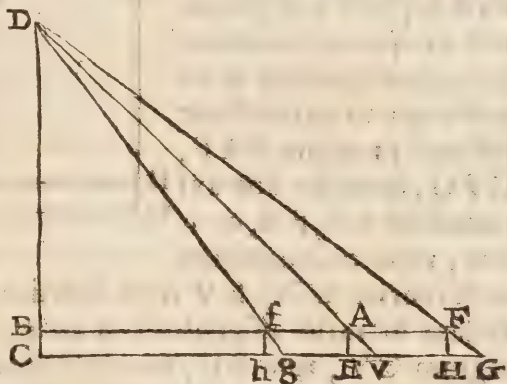
tita-

titatis relinquit, ad ipsam enim comparatur, ut nihil ad aliquid, unde sicut 1+0, & 1−0 æquantur 1, ita finita quantitas per infinitè parvæ additionem, aut subtractionem, non crescit aut minuitur, nec quantitas infinita per accessum, aut recessum finitæ quantitatis, nec etiam (si quę sint) plusquam infinitæ magnitudines augentur, aut decurtantur per magnitudinem, absolutè quidem infinitam, sed ordinis inferioris; ac in universùm, *magnitudines æquales censendæ sunt, quæ magnitudine dumtaxat infinities minori differunt*, ut in libello *Quadrat. Circ. & hyperb. ad Coroll. prop.* 17. dudum ostendi, & in Scholio ibidem adjuncto generatim admonui, ad hunc ipsum tractatum respiciens, quem vel ex tunc adumbraveram.

PROPOSITIO IV.

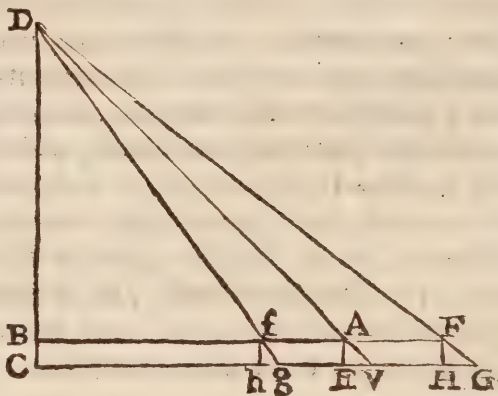
QUantitatum infinitè parvarum, quædam sunt ejusdem ordinis, & quamlibet inter se rationem assignabilem habere possunt.

1. Sit primò triangulum D B A, in quo D B æquetur B A, & huic parallela ducatur C V, ipsique propiùs accedere, atque infinitè proxima fieri intelligatur: quomodo tam B C (sive A E illi æquidistans) quàm E V, infinitè parvæ evadent *ex defin.* 4. quippe ad finitas D B, aut B A rationem habere poterunt minorem qualibet assignabili: semper tamen, ob similia triangula D B A, A E V, erit B C, sive A E æqualis E V, ut D B æqualis B A ponebatur. Quod si jam D B ad B F supponeretur habere aliam

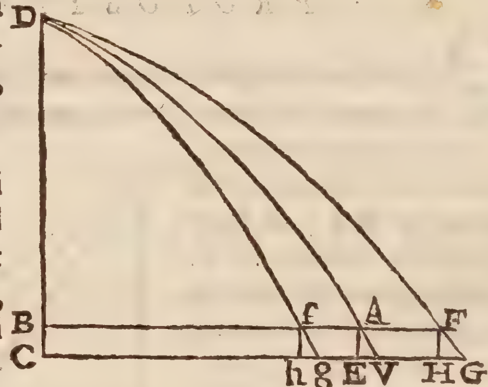


quam-

quamlibet rationem, putà *m* ad *n*, juncta DFG, & ducta FH ipsi BC parallela, erit similiter infinitè parva BC, vel FH ad infinitè parvam HG in eadem ratione assignabili *m* ad *n*, quam habent ipsæ DB, BF; quare in magnitudinibus infinitè parvis quælibet assignabilis ratio locum habere potest; Quod erat demonstrandum.



2. Sit jam secundò circa axem DB quælibet curva DAV, & alia huic analoga DFG, cujus nempe ordinatæ BF, CG ad ordinatas prioris BA, CV sint perpetuò in quavis constanti ratione assignabili *m* ad *n*. Si ergo, ut antea, fiant infinitè proximæ BAF, CVG, & ductæ sint axi parallelæ AE, FH, constat, ipsas ordinatarum differentias GH, EV fieri infinitè parvas; & tamen cùm eadem sit ratio assignabilis *m* ad *n*, tum integræ CG ad integram CV, tum BF, sive CH ablatæ ad ablatam BA seu CE, erit & reliquæ GH ad reliquam VE assignabilis eadem ratio *m* ad *n*; Quare &c.



3. Patet hinc tertiò etiam trapetia figuræ primæ, seu quadrilinea figuræ secundæ, FBCG, ABCV, [quæ pariter fiunt infinitè parva, pro majori accessu linearum BF, CG)

CG) futura ſemper in eadem ratione aſſignabili *m* ad *n*, quam perpetuò obſervant, in pari altitudine, quælibet ipſorum ordinatæ GC, CV: ergo &c.

4. Quin etiam quartò, ſi eadem quadrilinea circa axem BC revolvi intelligantur, orientur hinc trunci conici, ſeu conoidales, infinitè parvi [nam pro majori acceſſu planorum circularium, radiis BF, CG deſcriptorum, hi trunci aſſignabili quovis corpuſculo minores evadent]& tamen ſemper in ratione aſſignabili, nempe duplicata ipſius *m* ad *n*, ſive dicas, ut *mm* ad *nn*, eſſe oſtendentur, ob circulos à quibuslibet ipſorum quadrilineorum ordinatis FB, AB, ſive CG, CV, deſcriptos, eorundem radiorum quadratis proportionales: itaque & in hoc magnitudinum genere vera eſt Propoſitio.

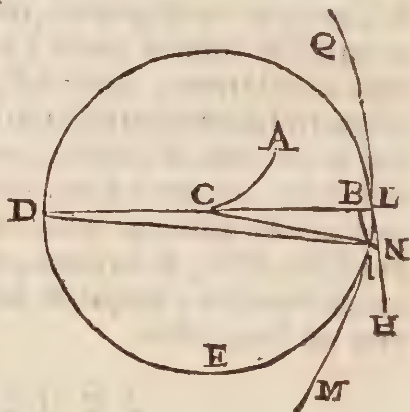
SCHOLION.

HInc patet eorum hallucinatio, qui magnitudines infinitè parvas pro minimis ſui generis habent, illaſque ſive ut penitus indiviſibiles, ſive ut invicem æquales conſiderant. Non ſolent quidem ſummi Mathematici in hunc errorem cum vulgo impingere, nec deſunt tamen exempla quædam, probantia id poſſe aliquando Viris etiam in hac arte, atque in hac ipſa methodo, verſatiſſimis, per incogitantiam, excidere. Videat Cl. Varignonius (hujus regulæ certè non ignarus, quam & toties exactiſſimè obſervat) an non occaſionem præbuerit, ſuſpicandi, calculi perplexitati majorem, quàm legitimo infinitè parvorum uſui, attentionem ab ipſo impenſam, quoties Vires Centrales examinans, aut Radios Evolutarum inquirens, angulum contingentiæ, utpotè infinitè parvum, aſſumit velut æqualem angulo infinitè parvo, ad centrum oſculantis circuli, à binis radiis infinitè proximis conſtituto, indeque triangula iſoſcelia conſiderat, eandemque laterum ad baſim proportionem deducit. Videantur Monum. Academ. Reg. edit. Amſtelędam. anni 1700 pag. 301; anni 1701 pag. 27,

E 31,

31, 34: anni 1703. pag. 252: anni 1706 pag. 245, 293, 647, 652, 656, *atque alibi fortasse.*

Nimirum posita Curva Q L M, ejusque Evoluta A C (quam videlicet tangunt prioris curvæ perpendiculares qualibet L C, l C) ductisque radiis infinitè proximis L C, l C ad centrū circuli L E D, propositam curvam osculantis (eo quòd sit maximus illi ad punctum L inscriptibilium, eandemque cum ipsa Q L M curvaturæ rationem obtineat, circa punctum L ipsi veluti congruens, & cum illa longissime repens) atque intervallo L l infinitè parvo, descripto arcu l N, occurrente tangenti L H in N, contendit Varignonius locis citatis, similia fore triangula L C l, l L N, unde deducit l N esse tertiam proportionalem post C L, L l, perinde ac si anguli infinitè parvi l L N, L C l æquales forent, cùm hic potius sit duplus illius; Nam extenso radio L C ad aliam circumferentiæ partem in D, ac juncta D l, est angulus L C l duplus ipsius l D L (20. 3. elem.) *huic verò æquatur l L N, qui à tangente L H, & secante L l [cum arcu L l ad summùm congruente] constituitur* [22. ejusd.] *adeoque L C l duplus est l L N; quare dictorum triangulorum similitudo, laterumque ad basim prætensa proportionalitas, non subsistit; Imò ducta l B tangenti L N parallela, ostendetur* [coroll. 8. 6. elem.] *L l media proportionalis inter B L, seu l N, & diametrum L D, non inter illam, & radium; adeòut formulę ex Varignonii calculo sic instituto prodeuntes, sint duplo majores quàm res exigeret. Atque hæc potius vera ergo censebitur differentia inter formulas Virium centralium, anno* 1701 *adductas, à formulis anno* 1706, 24 Aprilis, art. 11, 12, & 13 *inventis, quam differentiam Auctor ipse* pag. 238 *animadvertens,*

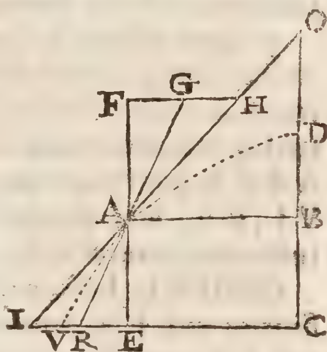


tens frustrà excusare nisus est, ex quo non tam magnitudinum æqualitas, quàm rationum similitudo in formulis illis exprimeretur, quæ etiam in duplicato, vel utcunque multiplicato ipsarum valore persistit: quod licèt verum sit, genuinum tamen illius variationis fontem non aperit, ex prænotata lege, tunc minùs attentè observata, pendentem; unde licèt in Varignonii casu nullus error denotationem Vis centralis inficiat, eo quòd perinde res se habeat, sive illa reciproca radii colligatur, sive reciproca diametri circuli osculatoris, cùm ipsimet radii sint, ut integræ diametri, tamen, admissa hac arguendi ratione, posset in aliis casibus talis error obrepere, unde falsa penitus conclusio deduceretur.

PROPOSITIO V.

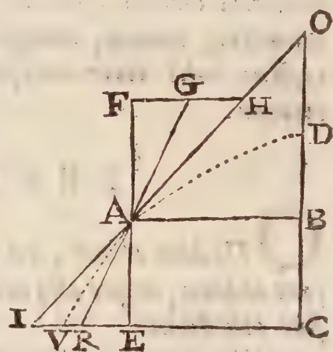
QUadam etiam, ex quantitatibus infinitè parvis, diversi sunt ordinis, atque alię aliis infinities majores, aut minores, idque sine ullo limite.

1. Sit primò curva DAV, cujus ordinatæ AB infinitè proxima fieri concipiatur alia CV, & axi DB parallela EA extendatur ultra curvam in F ad aliquam datã longitudinẽ AF, ducaturque FH ipsi AB parallela, occurrens in H rectę OAI tangenti Curvã propositam in A, & concurrenti cum CV in I; tum divisa FH ad punctum G in quavis ratione assignabili *m* ad *n*, jungatur GA, quæ producta omninò intra curvam cadet (aliàs & ipsa tangeret, quod est absurdum; nec enim duæ rectæ ad idem unius continuæ curvæ punctum illam tangere possunt) licèt post aliquod determinabile intervallum, illam fortasse sit secatura, & ideò ipsam CV, quæ ad in-



tervallum minus quolibet dato ipsi A B accedit, omninò secabit inter E & V, velut in R: eritque ratio E I ad I V major ratione ejusdem E I ad I R; sed hæc, ob similitudinem triangulorum, eadem est, ac F H ad H G, quæ potest esse quævis assignabilis *m* ad *n*, ergo E I ad I V, adeoque & dividendo E V ad V I, rationem habet majorem qualibet assignabili, unde *ex defin.* 5. *&* 6. illa infinities major est, quàm ista, & ordinis, ad hanc superioris; Quod &c.

2. Rursus trilineum ipsum V A I erit infinities minus trilineo E A V, vel E A I (ob basim V I infinitè minorem ipsa V E, vel E I) necnon ipsorum utrumque adhuc infinities minus est quadrilineo infinitè parvo A B C I, vel A B C V, aut A B C E [quia lineæ E V, E I sunt ipsa A B infinities minores) unde & hinc patet, varios ordines resultare infinitè parvorum.



3. Quin etiam si circa ordinatam B A omnes illæ areæ rotarentur, foret solidum à trilineo V A I infinitè minus solido à triangulo E A I, vel à trilineo E A V: hoc autem rursus infinitè minus solido à quadrilineis A B C I, A B C V, A B C E genito, nam quælibet superficies cylindricæ, ab V I, V E, E C productæ, fierent eodem ordine aliæ aliis infinities minores; Quare constat propositum.

COROLL. I. Cum ostensa sit *num.* 1. recta V I minor infinities ipsa E V, hinc est quòd juxta *coroll.* 2 *prop. III.* potest E V considerari ut æqualis ipsi E I, à qua differt differentia infinitè minori.

COROLL. II. Unde amplius demonstratur methodus infinitè parvorum in ducenda cujusvis curvæ tangente; cùm enim, ob similitudinem triangulorum, sit I E, sive illi, ex dictis, æqualis V E, ad A E, ut A B ad B O, ergo subtan-

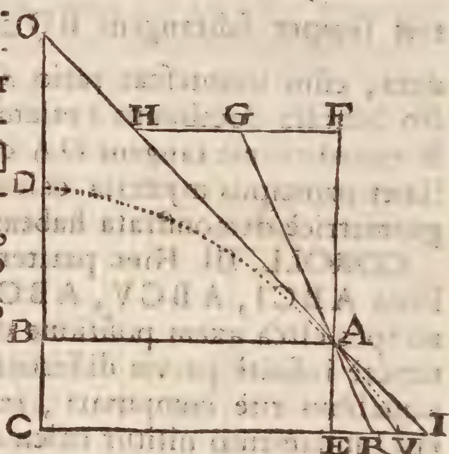
tangens B O eſt ſemper quarta proportionalis poſt differentiam infinitè parvam ordinatarum V E, & differentiam abſciſſarum A E ſeu B C : quare, ſi ordinata vocetur y, & abſciſſa x, adeoque differentiæ earundem ſint dy, dx, erit ſemper ſubtangens B O $= \frac{ydx}{dy}$. Et ex curvæ natura data, cùm innoteſcat ratio dy ad dx (ut mox in ſubiuncto Scholio docebimus) etiam nota fiet ratio B A ad B O, & expeditiſſimè tangens O A determinabitur : ita ut à ſuiſmet principiis myſteria calculi differentialis hoc modo geometricè demonſtrata habeantur.

COROLL. III. Hinc pariter colligitur, ipſamet quadrilinea A B C I, A B C V, A B C E [nec non & ſolida, quæ ab ipſis circa axem poſitione datum rotatis gignerentur] utpotè infinitè parvis differentiis diſcrepantia, poſſe pro æqualibus ritè computari, *juxta idem coroll. 2 prop. III.* cui fundamento nititur calculus integralis; ex ejus enim præſcripto, ſumma ex rectangulis ordinatarum B A in quaſlibet ſibi correſpondentes differentias infinitè parvas axis B C, æquatur ipſimet areæ curvilineæ C D A V : nec non ſumma cylindrorum, quorum baſes ſint circuli ab ordinatis deſcripti, & altitudines ſint eædem infinitè parvæ differentiæ axis, æquatur rotundo ſolido, ab ipſa figura curvilinea generato : quippe differentia omnis, per indefinitam axis ſectionem, multiplicato eorum rectangulorum, aut cylindrorum numero, & diminuta in infinitùm quantitate ſingulorum, fit infinitè exigua, adeòque evaneſcit.

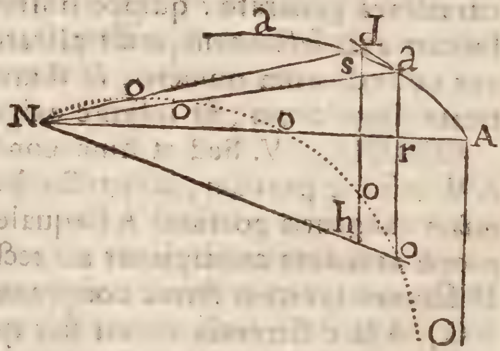
COROLL. IV. Sed et hinc conſtat, ipſummet arcum A V infinitè parvum, tam rectæ lineæ A V ſibi ſubtenſæ, quàm tangentis portioni A I æqualem eſſe : ſi enim A G tam propè accedere concipiatur ad rectam A H, ut punctis G, H ſibimet invicem fermè congruentibus, utriuſque ipſarũ A G, A H differentia minor fiat quavis aſſignabili magnitudine, ideſt evadat infinitè parva, tunc *ex 2. coroll.*

prop.

prop. III. fiet altera alteri æqualis; quare et A R æqualis evadet ipsi A I tangenti, multoque magis curva A V utrique interposita [quæ mediæ inter utramque longitudinis est, itaut quamdiu finita fuerit, major quidem ostendatur subtensa recta A V, adeoque & A R, quæ perpendiculo est propior, at minor tangente A I, obtusum angulum A V I subtendente] fiet æqualis tum ipsi tangenti A I, tum suæ subtensæ A V, & promiscuè una ex his pro alia tutò usurpari poterit, quoties de infinitè parvis sermo fuerit: imò ipsamet curvæ particula A V infinitè exigua, tamquam recta considerari poterit, citra ullum erroris periculum [nam error dum fit infinitè parvus, tandem evanescit, ac nullus evadit] quod significant recentiores Geometræ, dum curvas omnes sub ratione cujusdam polygoni infinitorum laterum spectare nos docent, & curvarũ tangentem quamvis pro unius, ex ejusmodi lateribus infinitè parvis, productione æstimãdam præscribunt.



COROLL. V. Eodem jure areas curvilineas quandoque licebit in triangula rectilinea infinitè parva resolvere, ad ipsarum dimensionem venandam: veluti si proponatur curva A*aa*, electo ubilibet, sive intra, sive extra curvæ perimetrum, quovis puncto N, atque



atque inde ad singula curvæ puncta ductis ramis infinitè proximis N*a*, N*s*, poterit sector N*sa* pro triangulo rectilineo censeri, quia *ex coroll. præced.* arcus *as* infinitè parvus pro recta assumi potest: & quoniam, extensa N*s* ad tangentem in *d*, portio *sd* aduc infinities minor evadit recta N*s*, adeòque triangulum *asd* est quantitas infinitè parva secundi ordinis, quippe infinities minus triangulo N*sa* jam infinitè exiguo, poterit indiscriminatim etiam N*ad* sumi pro ipso N*as*, & alterutrum ipsorum considerari velut elementum areæ NA*a*, itaut ejusmodi triangulorum summa det mensuram integram talis areæ; Et si talis alia curva O*o*N exhibeatur, cujus rami N*o* sint perpetuò paralleli ad correspondentem prioris curvæ tangentem *ad*, constat fore aream utrique curvæ interpositam *oo*OA*as* duplam semper sectoris correspondentis A*as*N, propter singula parallelogramma *daob* (quæ non differunt ab areolis infinitè exiguis *oaso*, nisi per trilinea infinities adhuc minora *odo*, *dsa*, ob bases *ob*, *ds* infinities minores ipsis *ao*, *sh*, & ideò æqualia invicem censeri debent *ex coroll. 2 prop. III. sæpe citato.*) dupla triangulorum A*d*N in eadem basi *ad*, iisdemque parallelis *da*, N*o* existentium, ut *cap.* 8. *Hugenianorum* demostravimus.

Obiter autem animadvertere placet, hujus methodi fundamentum, etsi novum videatur, nec absque scrupulo à plerisque admitti consueverit, nimirum: *magnitudines, quarum differentia minor evadit qualibet assignabili differentia, seu quæ differre possunt quantitate iisdem infinities minori, pro æqualibus rectè usurpari*: vetustissimum reipsa esse, ac Veterum methodo, quæ per inscriptiones, & circumscriptiones, longiori circuitu, figurarum æqualitatem, vel aliam proportionem venabatur, necessariò fuisse præsuppositum; Vis enim demonstrationum ejusmodi apud Euclidem, & Archimedem in eo certè consistit, quòd, nisi veræ forent ipsorum propositiones, assignari posset differentia figurarum,

nem-

nempe excessus, aut defectus ab asserta mensura: facta autem tali assignatione, cùm per inscriptionem, & circumscriptionem ostendantur aliæ figuræ minùs excedere, aut deficere à figuris propositis, quàm pro differentia assignata, & tamen assertam mensuræ rationem constanter observare, concluditur ab absurdo, differentiam ab adversario assignatam nullam esse, utpotè minorem qualibet assignabili: atqui hoc ipsum, majori compendio, & nos dicimus, dum magnitudines, differentia infinities minori discrepantes, pro æqualibus habemus: si non sunt habendæ pro æqualibus, assignabilis erit eorum differentia; assignetur ergo: non igitur ipsarum differentia minor evadet qualibet assignabili, quod est contra hypothesim; falsum est ergo, non esse habendas pro æqualibus: Quod est propositum.

SCHOLION.

INvestigatio autem rationis differentiæ ordinatarum ad differentias abscissarum in qualibet Curva, unde tangentium methodum superiùs, coroll. 2. hujus prop. *pendere diximus, sic procedit. Quantitates determinatæ, & ejusdem semper mensuræ, primis alphabeti litteris* a, b, c, e *&c. denotentur: indeterminatæ verò, quæ subinde crescunt, aut decrescunt, per postremas* x, y, z, u *&c. de more exprimantur, ut habeatur æquatio curvæ propria: sic in parabolis, si latus rectum vocetur* a, *& abscissa* x, *ordinata verò* y, *patet, æquationem curvæ propriam fore* $yy = ax$, *propter ordinatæ quadratum semper æquale rectangulo abscissæ in latus rectum: atque ita in aliis magis compositis. Tum supponatur abscissa, verbigratia* x, *augeri portione sui infinitè parva* dx *(sic enim illam exprimere docuit Leibnitzius, ut differentiam ipsius* y *vocat* dy, *& ipsius* z *appellat* dz, *atque ita in aliis) adeò ut evadat abscissa* $x+dx$; *& tum illi correspondere deprehenditur* $y+dy$, *vel* $y-dy$ *pro ordinata (prout videlicet applicatæ crescunt, aut decrescunt ad*

incre-

incrementum abscissæ) itaque in æquatione, quæ curvæ naturam determinat, si loco x, *&* y, *ac productorum ex ipsis, vel potestatum earundem, subrogetur* x†dx, *&* y†dy, *eorumque producta, aut potestates; ac mox termini comparentur, quos differentiæ* dx, *&* dy *ingrediuntur, abiectis tum terminis, quos hæ differentiæ non afficiunt [utpotè in vim prioris æquationis, ab initio propositæ, jam æqualibus] tum terminis, quos ingreditur productum ex pluribus differentiis* dx, dy, *sive ad invicem, sive per se ipsas multiplicatis (utpotè infinities minoribus, &* per 2. coroll. prop. III. *æqualitati reliquorum terminorum nihil derogantibus, si abiiciantur) habebitur æquatio differentialis, ex qua ratio differentiæ ordinatarum ad differentias abscissarum, nempe earundem* dy, *&* dx, *innotescet Itaque in æquatione parabolæ superius proposita, ubi* yy = ax, *habebitur etiã* yy†2ydy†dydy = ax†adx; *sed jam* yy = ax, *ergo residua pariter æquantur, scilicet* 2ydy†dydy = adx: *abiiciatur* dydy, *quod infinities minus est ipso* 2ydy [*nam ad illud est in ratione infinitè parvæ quantitatis* dy *ad finitam* 2y] *manebit adhuc* 2ydy = adx; *adeòque ut* a *ad* 2y, *sive ut* y *ad* 2x, *ita* dy *ad* dx, *& ita consequenter ex supradictis* coroll. 2. hujus propositionis, *ordinata* y *ad subtangentem, quæ ideò dupla invenietur abscissa* x, *utpotè* = 2x.

Aliud exemplum esto in curva, cujus natura definitur æquatione yy = aa†xx (*quæ esset hyperbola æquilatera ad secundam diametrum relata) ergo si* y *evadat* y†dy, *&* x *fiat* x†dx, *habebitur* yy † 2ydy † dydy = aa † xx † 2xdx † dxdx : *auferantur tum* yy = aa † xx, *tum termini infinities minores reliquis* dydy, *ac* dxdx; *eritque* 2ydy = 2xdx, *adeoque* dy *ad* dx *erit, ut* x *ad* y, *unde ut abscissa* x *ad ordinatam* y, *ita erit ipsa eadem ordinata* y *ad subtangentem quæsitam, quæ erit tertia proportionalis abscissæ, & ordinatæ.*

Expeditiùs autem sumitur differentia cujusvis æquationis propositę, si in illa ubique termini ab indeterminatis affecti multiplicentur per numerum dimensionis earundem indeterminatarum,

& una illarum dimensio in suam differentialem commutetur, loco x, *&* y *scribendo* dx, *&* dy. *Ita enim si* $yy = ax$, *etiam* $2ydy = adx$; *si* $x^3y = a^4 + xxyy$, *etiam* $3yxxdx, + x^3dy = 2xxydy + 2yyxdx$, *adeoque per antithesim*, $3yxxdx - 2yyxdx = 2xxydy - x^3dy$: *& sic est* dy *ad* dx, *ut* $3yxx - 2yyx$ *ad* $2xxy - x^3$. *Id quod valet in quibusvis, tam perfectis, quàm imperfectis indeterminatarum potestatibus: adeò ut generatim differentia ipsius* x^m *sit* $mx^{m-1}dx$, *quemcunque numerum integrum, aut fractum, positivum, vel negativum denotet exponens* m.

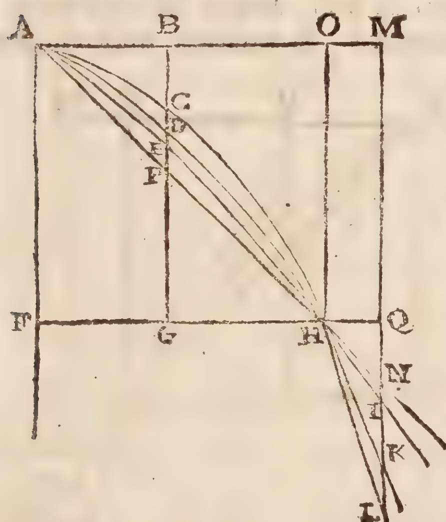
Atque hinc viceversa integratio cujusvis differentialis, seu reversio ad quantitatem, cujus proposita fuerit differentia, habetur, augendo unitate dimensionem indeterminatę x, *vel* y, *& per eandem dimensionem sic auctam, totum productum dividendo, ut ipsius* $x^m dx$ *summa erit* $\frac{x^{m+1}}{m+1}$. *Unde eliciuntur innumerę spatiorum superficialium, & solidorum dimensiones: dummodò advertatur, inventę summę persæpe addendam, aut subtrahendam, prout res tulerit, quantitatem aliquam constantem, eo quòd eadem differentia sit duarum quantitatum, sive illis communem jungas, sive demas datam aliquam magnitudinem; Quando autem hęc addi, vel detrahi debeat, invenies, observando, an ubi evanescit quantitas, de cujus dimensione per integrationem obtinenda agitur, pariter evanescat integralis inventa, an quiddam constans inter ejus terminos adhuc supersit, hoc ipsum enim sub signo contrario erit inventæ integrali apponendum, ut verus valor summę quæsitæ habeatur.*

PROPOSITIO VI.

QUod præcedens docuit, aliter per infinitas parabolas demonstrare.

1. Intra quadratum AFHO, cujus diameter AH, descriptæ sint, eodem latere recto AO, infinitæ parabolæ variorum graduum, nempe AEH quadratica, sive Apollonia-

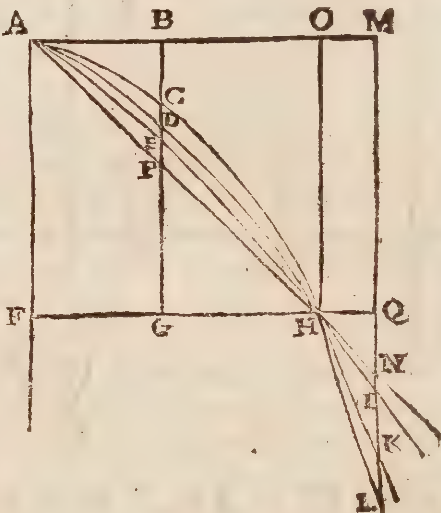
niana, ADH cubica, ACH biquadratica, &c. adeo ut ducta ubivis recta BCDEPG axi parallela, secante has curvas, & rectam AH, ut in figura, sit semper HO ad BP in eadem ratione ipsarum OA, AB, sed HO ad BE in earundem ratione duplicata, & ad BD in triplicata, ad BC autem in quadruplicata, atque ita deinceps. Patet ergo, rectas HO, seu GB, & reliquas ejus interceptas BP, BE, BD, BC &c. fore semper continuè proportionales; quare si tam proxima fieri concipiatur BG axi AF, ut intercepta BP evadat infinitè parva, cùm sit ratio GB ad BP eadem rationi BP ad BE, & hujus ad BD, & hujus rursus ad BC, prima autem ratio sit major qualibet assignabili *ex def.* 4. *& convertendo*, etiam reliquæ majores erunt qualibet assignabili, & ideò quantitatum PB, BE, BD, BC, quælibet respectu antecedentis erit, *per def.* 5. *& 6.* infinitè parva, atque inferioris ad ipsam ordinis: quare inter magnitudines absolutè infinitè parvas datur hæc diversitas ordinis: quod erat &c.



2. Angulus contingentiæ BAE est infinities minor angulo rectilineo BAP, & angulus BAD rursus infinities minor est angulo BAE, angulus autem BAC infinities adhuc minor est angulo BAD, atque ita porrò in infinitum, ob subtensas PB, EB, DB, CB, eadem ratione majori quavis assignabili in infinitum decrescentes; datur ergo & in angulis infinitè parvis hæc ordinis diversitas: quod erat demonstrandum.

 3. Area

3. Area ipsa rectanguli infinitè parvi A B G F infinitè major est triangulo A B P, & hoc infinitè majus trilineo A B E, quod ipsum infinitè majus est trilineo A B D, & hoc infinitè adhuc majus trilineo A B C, atque ita deinceps, ob bases continuè proportionales, & ratione majori qualibet data decrescentes; unde patet in superficiebus infinitè parvis hæc diversitas ordinis.



4. Quod si eædem areæ vertantur circa A B, ut à rectangulo A B G F cylindrus, à triangulo A B P conus, à reliquis trilineis fusi conoidales generentur, constat, ex solidis ita genitis, alia aliis infinities minora, ob similem rationem, proditura; quare et in corporibus infinitè parvis variorum ordinum diversitas locum habet; quod erat &c.

COROLL. Ex dictis supra *num.* 2. habetur, quòd sicut nulla recta linea primum angulum contingentię B A E dividere potest, ut ostendit Euclides *lib.* 3. *prop.* 16. sed tantũ arcus circuli, vel parabolæ, aut alterius lineæ æquicurvæ; ita postmodùm angulum B A D nullus arcus circuli, vel parabolæ quadraticæ dividere potest, sed tantùm arcus parabolæ cubicæ sibi similis, vel altioris ordinis; angulum verò B A C nec ipsa quidem parabola cubica dividet, atque ita de aliis in infinitum: *neque novit natura limitem*, ut ait doctiss. Eques Isaac Nevvton *Princip. Math. Philos. Nat. lib.* 1. *Sect.* 1. *Schol. post lemm.* 11. ubi et notat, binis quibuslibet ejusmodi angulis alios rursus inseri posse

me-

medii, inter utrumque, ordinis, ideſt infinities minores uno extremorum, & infinities majores alio.

SCHOLION.

EX hoc vario infinitè parvorum ordine, innotuit Philoſophis, Gravitatem eſſe vim infinitè parvam reſpectu Virtutis cujuslibet actu moventis corpus quoddam velocitate notæ menſuræ; ſi enim hæc Virtus proiiciat mobile per directionem A O, ita ut tempore t *ferri poſſit ab A ad O, utique dicti temporis particula infinitè parva* dt *illud promovebit per portionem ſpatii infinitè parvam A B; ſed interim Gravitas illud deprimet uſque ad parabolam A E H, nimirum per particulam B E infinitè minorem ipſæ B F, ſive ipſa A B; quare Vis Gravitatis infinities minor cenſenda erit Virtute dicti proiicientis mobile per A O, ſiquidem illi reſpondet effectus infinities minor, quàm huic, dum utraque tempore infinitè parvo, ut æquabiliter operans, concipi debet, nam augmenta velocitatis, quæ tempore infinitè parvo* dt *ſibi ſuperaddit Gravitas ſupra illum infinitè exiguum velocitatis gradum, quo incipit deprimere mobile, utpotè infinities infinitè minora, velut nihil conſideranda ſunt, donec per tempus finitæ, & notæ menſuræ ſatis adoleverint, ut jam debeant computari. Idem ſequetur in Viribus (ſiquæ ſint alicubi) aliorum generum infinities minoribus: nempe ſi talis ſpecies Gravitatis, aut Vis centripetæ concipiatur, quæ corpora acceleret in duplicata ratione temporis, hæc compoſita cum eadem Virtute projectiva, in temporis differentia infinitè parva* dt *deprimet mobile per B D uſque ad parabolam cubicam, dum Vis gravitatis depreſſiſſet per B E uſque ad parabolam quadraticam; ideoque Vis centripeta dicti generis foret adhuc infinities minor Vi gravitatis, propter motum B D infinities minorem ipſo B E. Similiter ſi Vis centripeta ejus rationis fingeretur, quæ accelleraret mobile in triplicata temporis ratione, conſtat, quòd hæc, momentaneo tempore* dt, *non niſi per B C ad parabolam quadratoquadraticam deprimeret mobile,*

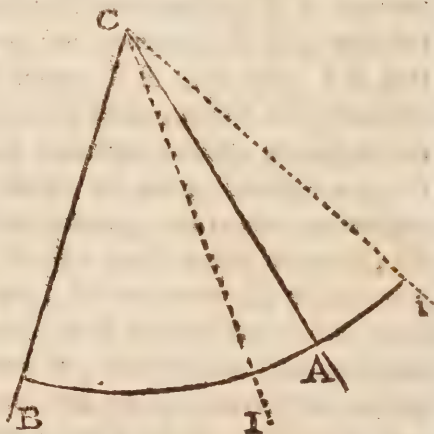
unde

unde adhuc infinities minor praecedenti probaretur. Verùm hæc de infinitè parvis sufficiat breviter attigisse: ad infinitè magna gradum facere convenit, de quibus eadem fermè demonstrabimus, ut nostrum propositum Spatiorum Plusquam infinitorum concludere liceat.

PROPOSITIO VII.

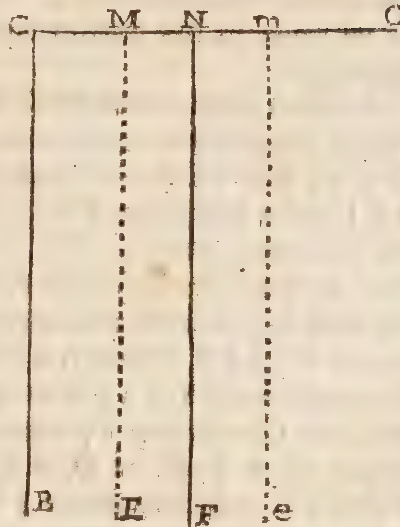
Quantitatum absolutè Infinitarum quædam ejusdem sunt ordinis, & quamlibet inter se rationem assignabilem habere possunt.

1. Sit enim primò angulare spatium BCA, lineis CB, CA æquè in infinitum productis, per modum infinitè longi sectoris, interiectum, fiat autem angulus BCI ad ipsum BCA in quavis ratione assignabili *m* ad *n*: patet, infinitum quoque spatium interceptum rectis CB, CI æquè in infinitum protractis cum ipsa CA, futurum in eadem ratione assignabili *m* ad *n* ad angulare spatium prius datum BCA: ideoque hæc absolutè infinita spatia ejusdem inter se ordinis erunt, & quamlibet inter se rationem habere poterunt.



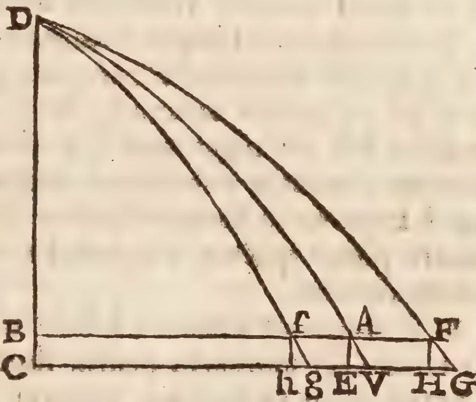
2. Sit rursus (*in figura sequenti*) parallelogrammum infinitè longum BCNF super finita basi CN, & fiat CM ad CN in qualibet ratione assignabili *m* ad *n*, ducaturque ipsis CB, NF parallela ME, eritque infinitè longum parallelogrammum basi CM, lineis CB, ME (æque infinitè productis cum ipsa NF) interiectum, ad prius pa-

parallelogrammum BCNF in eadem assignabili ratione *m* ad *n*, hoc est suarummet basium CM ad CN: quod erat &c.



3. Infiniti cylindri ex conversione parallelogrammorum BCME, BCNF circa CB, erunt utique in ratione basium, quæ duplicata est ipsarum CM, CN, adeoque in ratione assignabili *mm* ad *nn*, quare etiam in figuris solidis vera est propositio: quod oportuerat demonstrare.

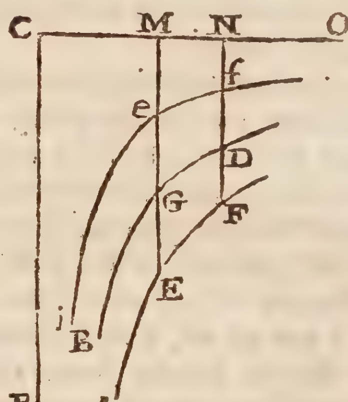
4. In qualibet ex iis figuris, quæ in infinitum ampliantur, ut parabolę, aut hyperbolę DAV, circa axem DC, fiat alia figura DFG priori analoga, cujus nempe ordinatæ FB, GC ad ordinatas prioris AB, VC sint semper in eadem ratione quapiam assignabili *m* ad *n*: patet, quòd si utraque cum axe suo in infinitum producatur, erit area infinita CDFG ad infinitam aream CDAV in ratione ordinatarum *m* ad *n*, quæ est ràtio assignabilis; ergo idem quod prius.



5. Sed et solida ab his genita circa axem infinitum DC erunt in ratione suarum sectionum circularium, sive ut qua-

quadrata ordinatarum, & ideò in ratione aſſignabili *mm* ad *nn* unde in his pariter infinitis corporibus obtinet propoſitio.

6. Inter aſymptotos MC, CP poſita Hyperbola Apolloniana DGB, fiat alia huic analoga FEI cujus ordinatæ FN, EM ad ordinatas prioris DN, GM ſint in quavis aſſignabili ratione *m* ad *n*, patet infinita utraque ſpatia NFEIC, NDGBC (ut in Hugenianis *cap.* 8. *n.* 11. & in Quadratura Circuli *prop.* 17. oſtendi, atque infra *Epiſt. ad D. A. L. A. lemm.* 12. demonſtrabitur) fore ad invicem in eademmet ratione aſſignabili ordinatarum *m* ad *n*; quod eandem veritatem confirmat.



7. Imò et quia ſemper ordinata quævis ME, quantumvis ipſi CP aſymptoto proxima, eſt ad ordinatam MG, ut *m* ad *n*, quidni dicamus, & ipſam aſymptoton CI hyperbolæ FE ad aſyptoton CB alterius hyperbolæ pariter eandem rationem cæterarum ordinatarum *m* ad *n* habituram? Ergo et in longitudinibus abſolutè infinitis locum habere poteſt quævis aſſignabilis ratio: quod fuerat demonſtrandum.

8. Denique et rotunda ſolida ab hiſce ſpatiis aſymtoticis circa CN converſis genita ſunt molis abſolutè infinitæ (poteſt enim ex utrovis reſecari versùs baſim cylindrus æqualis cuilibet dato *ex coroll.* 18. *Torricell. de Solido Hyperbolico*), & tamen aſſignabilem inter ſe rationem obſervant *mm* ad *nn*, quæ eſt quadratorum, ſeu circulorum, qui ab ordinatis genitricum hyperbolarum, ea rotatione, fiunt: itaque infinitæ magnitudines cujuslibet aſſignabilis rationis ſunt capaces: quod &c.

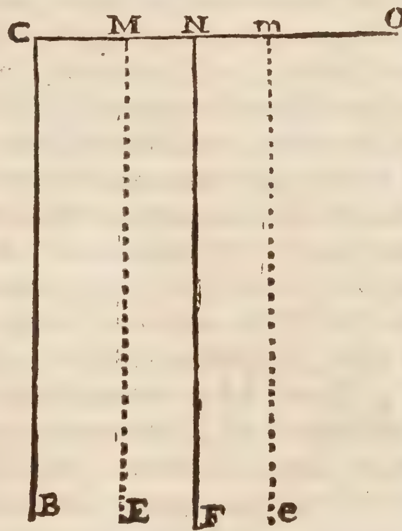
CO-

COROLL. Patet ex dictis *n.* 7. infinitas aſymptotos hyperbolarum non ſemper æquales cenſendas eſſe, cùm imò ſint ad invicem, ut quæ in pari altitudine ad alteram asymptoton utriuſque hyperbolæ ordinantur, ſive ut inſcripta ipſarum parallelogramma, vel etiam ut earundem hyperbolarum figuræ, quæ à recto, & tranſverſo ipſarum axe continentur: quemadmodum & ipſa hyperbolica ſpatia ſunt in eadem ratione dictarum figurarum, quæ ſub axibus continentur; qua in re, ut in pleriſque aliis proprietatibus, convenire hyperbolas cum ellipſibus, quæ pariter ſunt, ut axium figuræ, notiſſimum eſt Geometris.

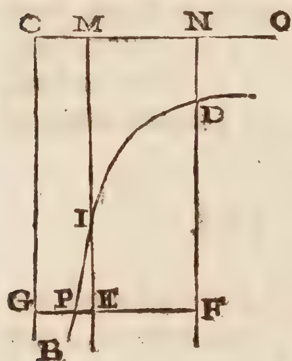
PROPOSITIO VIII.

QUadam verò, ex quantitatibus abſolutè infinitis, diverſi ſunt ordinis, atque aliæ aliis infinities majores, aut minores, idque ſine ullo limite.

1. St primò Spatium angulare BCO, lateribus CB, CO indefinitè productis interjectum: patet, hoc infinities majus fore quovis parallelogrammo infinitæ dútaxat longitudinis CB, ſed finitæ latitudinis CM, aut CN, videlicet ipſo BCME, aut BCNF, nam in pari omnium longitudine infinita CB, ſunt ad invicem, ut latitudines CO, CM, CN, quarum prima ad utramlibet poſteriorum habet rationem majorē qualibet aſſignabili.



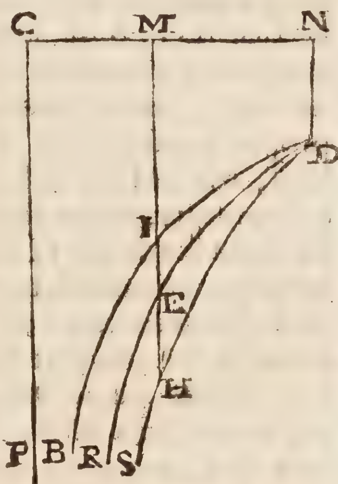
2. Sit deinde Spatium CNDIPB, hyperbola Apolloniana DIP [aliave curva asymptotica, quæ cum asymptoto infinitum ſpatium contineat, cujuſmodi eſt Conchois Nicomedea, & aliæ altioris gradus Hyperbolæ, qua parte ordinatarum poteſtates majores ſunt poteſtatibus abſciſſarum] cum ſua asymptoto CB infinitè producta comprehenſum; & fiat, ut *m* ad *n*, ita NC ad CM, tum agatur ME asymptoto parallela, quæ ipſi curvæ DIP alicubi occurret, velut in I [eo quòd curva ſemper fiat propior asymptoto, & ad intervallum GP perveniat minus quolibet dato intervallo, CM vel GE] atque ulterius protenſa, ſpatium PIE abſolutè infinitum (cujus nempe ordinatæ PE perpetuò creſcunt, dum longitudini IE in infinitùm minori applicantur, decreſcentibus è contrario ordinatis asymptotici ſpatii GP) comprehendet; unde ſi quadrilineo IMDN finito, & bilineo PIE infinito, commune addatur ſpatium CMIPB, fiet area, CNDIB abſolutè minor parallelogrammo infinitè longo BCME: quarè major erit ratio parallelogrammi infiniti BCNF ad infinitum ſpatium asymptoticum CNDIB, quàm ad infinitum parallelogrammum BCME; eſt autem ad hoc in ratione baſium CN, CM, hoc eſt, ut *m* ad *n*, ergo BCNF ad CNDIB rationem habet majorem qualibet aſſignabili *m* ad *n*, & ideò eſt infinities majus eodem. Quod &c.



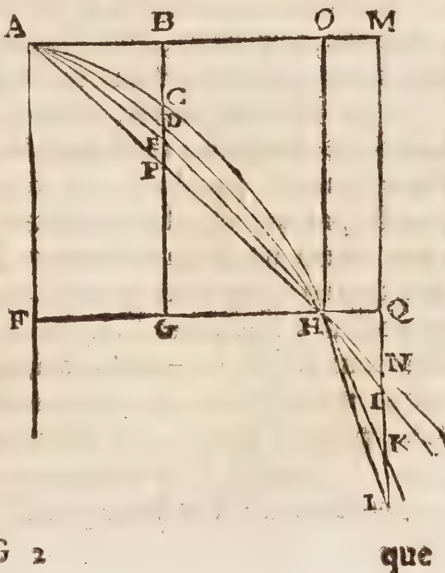
3. Quod ſi hęc omnia ſpatia circa CNO convertantur, manifeſtum eſt, ſolidum ab angulari ſpatio BCO infinities majus fore cylindro à parallelogrammo BCNF, & hoc rurſus infinities majus ſolido infinito, quod CNDIB produceret: quare et in corporibus infinitis diverſi infinitorum ordines obſervantur.

4. Jam

4. Jam verò si per punctum D, inter asymptotos CN, CB transeant infinitæ hyperbolæ, nimirum linearis, sive Apolloniana DIB, quadratica DER, cubica DHS &c. ita ut rationi NC ad CM æqualis sit ratio MI ad ND, ejusdem verò duplicata sit ratio ME ad ND, & triplicata ratio MH ad ND, & sic deinceps, patet fore in continua ratione ipsas ND, MI, ME, MH &c. ideoque etiam si punctum M cum linea MIEH per ipsum transeunte, continuò accedat, ac tandem congruat puncto C, & asymptoto CBRS, erunt in continua ratione ND ad infinitam CB, ut CB ad infinitam CR, atque ut hæc ipsa ad infinitam CS, unde varii ordines infinitarum longitudinum nascentur, quarum aliæ aliis sunt infinities majores.

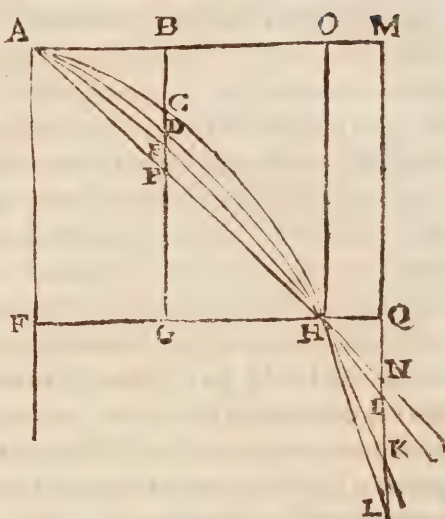


5. Idem ex infinitis Parabolis AEH, ADH, ACH [de quibus *prop. 6.* egimus] ultra nodum H cum recta AH (quę diameter est quadrati illis circumscripti) productis, ostendi potest; ducta enim ipsi HO parallela ML, omnes secante in N, I, K, L &c ut in figura, erit rationis AO, AM, sive OH, MN, duplicata ratio OH, MI, triplicata verò OH, MK, quadruplicata autem OH, ML, at-



 que

que ita deinceps (eo quòd præfatæ axi parallelæ sint ex ordine, ut quadrata, cubi, biquadrata, altioresque potestates abscissarum à vertice AO, AM, juxta ejusmodi parabolarum naturam), quare continuè proportionales erunt OH, MN, MI, MK, ML &c. idque in quacunque distantia ducta fuerit MNIKL, adeoque etiamsi distantia AM sit infinita, sive infinitè major OA: undè et MN erit infinitè major OH, & sic MI pariter infinitè major evadet ipsa MN, & MK infinities major MI, & ML ipsa MK, atque ita deinceps sine limite: imò & sumptis, inter binas quaslibet dictarum continuè proportionalium sibi immediatas, mediis proportionalibus, aliæ intermediæ parabolæ orirentur, diversique ordines medii infinitorum prodirent, inter superiùs recensitos.



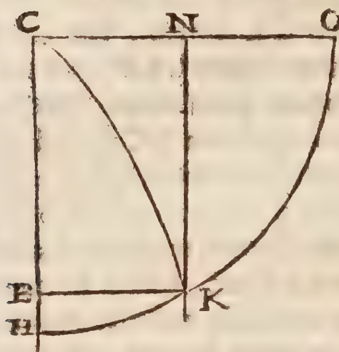
6. Sic ostendi potest, inter spatium infinitum angulare, & infinitè longum parallelogrammum finitæ latitudinis, mediare spatium parabolicum circa suum axem consideratum (uti & spatium ab alia qualibet curva comprehensum, quæ circa axem ita se in infinitum suis ordinatis expandat, ut ejus tamen tangentes quemlibet angulum cum axe continere possint) fiat enim (*in figura sequenti*) angulus BCO ad angulum BCL in quavis ratione assignabili *m* ad *n*: patet, quòd, ipsa CO tangente parabolam CK circa axem CB descriptam, ejus curvæ alicubi occurret CL, velut in K [27. 1. *Conic.*] & ulteriùs protensa continebit cum curva parabolica PK infinitè producta spatium infinitum (quip-

pe

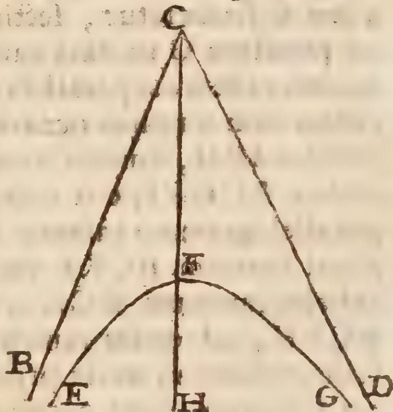
pe cujus latitudo semper augetur) P K L; & ideò spatium angulare B C L, quod à parabolico B C P deficit quidem segmento C K finito, sed illud excedit infinito spatio L K P, erit utique majus eodem parabolico spatio, unde angulare spatium B C O ad illud parabolicum majorem habebit rationem, quàm ad aliud angulare BCL, idest, ex constructione, majorem habebit rationem ad illud, quàm sit quævis assignabilis ratio *m* ad *n*, quare erit illo infinitè majus. At, quia recta N K I axi parallela, nedum secat parabolam C K P in K, sed et aliam quamlibet, quæ circa eundem axem describeretur, sectis singulis ordinatis K M prioris ad punctum G in data ratione *m* ad *n*, qualis esset C G H, secaret eadem axi parallela alicubi in puncto F (26. 1. *Conic.*) eidem non amplius occurrens, unde spatium infinitum resultabit I F H, finitum verò C F N, atque utrivis addito eodem B C G F I, erit majus parabolicum spatium B C F H parallelogrammo infinito B C N I, & ideò parabolicum aliud spatium B C K P majorem habebit rationem ad parallelogrammum B C N I, quàm ad parabolicam aream B C F H, ad quam tamen rationem habet ordinatarum, scilicet *m* ad *n*; unde primum parabolicum spatium superat infinitum illud parallelogrammum, ultra omnem assignabilem rationem, scilicet est illo infinities majus, cùm esset [ex ostensis] angulari spatio B C O infinities minus; dantur ergo diversi infinitorum ordines, ita ut quædam sint aliis infinities majora, aut minora; quod &c.

COROLL. I. Hinc habetur, infinitum Parabolicum Trilineum O C K P, quod ab angulari spatio B C O differt parabolico spatio B C P, ex dictis *num.* 6. infinities minori, ipsimet angulari spatio B C O æquale censeri posse [*ex coroll.*

roll. 2. prop. III.] dummodo æquè in infinitum utraque CO, CB protracta intelligatur [ad modum sectoris OCH] si enim recta NK, quantumvis distante, axi parallela definiretur trilineum Parabolicum, jam ejusdem ordinis esset cum parabolica area BCP (nempe illius subduplum) non verò illa infinities majus; sed tunc longitudo CB foret infinities major latitudine CN trilinei, quippe ad hanc esset in ratione ipsius CN [quæ infinita supponitur] ad latus rectum propositæ parabolæ, ex generali natura ipsius.



COROLL. II. Omnis hyperbola EFG circa axem FH indefinitè producta, spatium continet infinitum ejusdem ordinis cum spatio angulari à suis asymtotis BC, CD contento, imò illi penitus æquale, differentia enim asymptoticorum spatiorum BCFE, DCFG infinitè minor est (*ex num. 2.*) ipso angulari spatio, imò tot gradibus illo inferior est.



COROLL. III. Et hinc spatium cujusvis hyperbolæ EFG, circa suum axem FH, infinities majus est spatio parabolæ ad eundem axem per ipsummet verticem descriptæ: illud enim ejusdem est ordinis cum spatio angulari, quod ostensum est infinitè majus parabolico.

COROLL. IV. Insuper hinc ratio elucet, cur impossibile sit Hyperbolen Parabolæ inscribere, aut hanc illi circumscribere, sive per eundem, sive per diversos vertices, ut

ut habet Vincentius Viviani *lib.* 1. *de Max. & Min. prop.* 50; ſemper enim hyperbola ſuapte natura major eſt, quàm parabola, unde nequit illa intra hujus fines concludi.

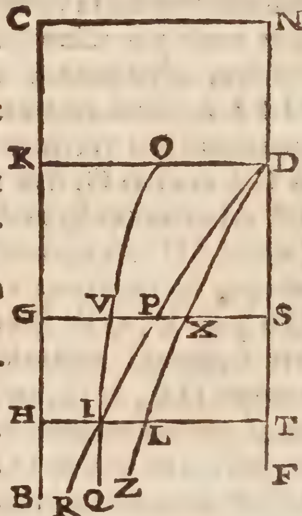
PROPOSITIO IX.

V*Arietatem ordinis Infinitorum item ex infinitis hyperbolis demonſtrare.*

1. Eſto ſpatium DPRBK, ordinata D*K* uni aſymptoto CN parallela, & altera aſymptoto *K*B, atque hyperbola prima, ſive Apolloniana DPR infinitè producta comprehenſum; tranſeat verò per idem punctum D intra eaſdem aſymptotos alia hyperbola DXLZ, cujus ordinatarum D*K*, XG quadrata ſint reciprocè, ut abſciſſę GC, *K*C à centro C, ſive ut ordinatę D*K*, GP ad priorem hyperbolam: eruntque (ducta DF aſymptoto CB parallela) ubique in continua ratione D*K* [ſeu GS] GX, GP. Secetur jam quælibet ordinata poſterioris hyperbolæ, nempe D*K*, XG, in punctis O, V in data quavis ratione *m* ad *n*, per quæ puncta intelligatur tranſire alia curva OVQ ejuſdem utique generis cum ipſa DXZ: eritque ſpatium *K*OVQB ad ipſum *K*DXZB in ratione KO ad KD, ſive *n* ad *m*, per conſtructionem: Porrò, ubi DXZ pervenerit ad intervallum LH æquale ipſi OK, cùm debeat ordinata LH ad ordinatam IH hyperbolæ OVQ eſſe in ratione DK ad OK, ſive TH ad HL, erunt in continua ratione TH, LH, IH, & ideò punctum I erit etiam ad priorem hyperbolam Apollonianam DPR; quare ſecabunt ſe curvæ OVQ, DPR in puncto I,

C N K O D V P G S X I H T L F B R Q Z

cto 1, non amplius sibi occurrentes, eo quòd ratio HI ad BR semper futura est duplicata rationis HI ad BQ, ut de ipsis DXZ, DPR se in puncto D secantibus dicebatur. Et ideò spatium KOVQB, ad partes B infinitè protensum, majus erit infinito spatio KDPRB (nec enim portio OVIPD, qua primum spatium à posteriori deficere videtur, est in his computanda, quippe undecunque finita, adeoque infinitè parva respectu dictorum spatiorum, sed attendi debet excessus QIR absolutè infinitus, ut *in Scholio III.* demonstrabimus) unde minor erit ratio spatii KDPRB ad KDXZB, quàm KOVQB ad idem spatium KDXZB, hoc est quàm sit ratio quævis assignabilis, *n* ad *m*; ideò que spatium ab Apolloniana hyperbola comprehensum est infinitè parvum respectu spatii ab hyperbola quadratica definiti, & hoc vicissim, respectu illius (licet absolutè infiniti) est infinitè magnum, & ordinis superioris, sive *juxtà defin. VII.* est *Plusquàm infinitum*; quod &c.

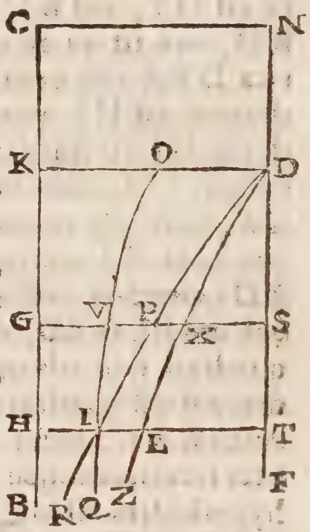


2. Si aliorum graduum superiorum hyperbolæ per idem punctum D describantur, in quibus cubi, vel quadratoquadrata, aut aliæ altiores potestates ordinatarũ reciprocè respondeant abscissis, simili modo demonstrabitur, areas hyperbolarum superiorum infinitè majores esse areis inferiorum, quantumvis jam infinitis, vel plusquam infinitis: supponatur enim DPR Quadratica hyperbola, & DXZ cubica, adeò ut hujus ordinatarum cubi, illius verò quadrata reciprocè sint ut abscissæ; fiat autem, proportionali sectione ordinatarum DK, XG posterioris hyperbolæ, alia cubica hyperbola OVQ; eritque spatium KOVQB ad ipsum

ipſum KDXZB in ratione KO ad KD, puta *n* ad *m*. Pone jam, curvâ DXZ perveniſſe ad intervallum LH, quod ſit ad HT, vel KD, ut quadratum KO ad quadratum KD, ſive ut *nn* ad *mm*; occurrat autem hyperbola quadratica DPR ipſi ordinatæ HL in puncto I: eritque HI quadratum ad HL quadratum in ratione compoſita ex quadrato HI ad quadratum KD (ſive ratione cubi HL ad cubum KD, cùm utraque ratio ſit reciproca abſciſſarum C*K*, CH) & ratione quadrati KD ad quadratum HL, aut cubi *K*D ad quadratum HL ductum in altitudinem *K*D; quæ duæ rationes conflant rationem cubi HL ad quadratum HL in KD, nempe rationē HL ad *K*D, ideſt *ex conſtr.* quadrati KO ad quadratum *K*D. Cùm itaque HI quadratum ad quadratum HL ſit ut quadratum *K*O ad quadratum KD, patet ipſas KD, LH, in O, & I proportionaliter ſecari, adeòque punctum I pertinere ad cubicam etiam hyperbolam OVQ, quæ propterea ſecabit ipſam DPR in I, nec illi amplius occurret, eo quòd ſemper futurum ſit quadratum BR ad quadratum HI, ut cubus BQ ad cubum HI, ut antea oſtenſum eſt; quare ſpatium KOIQB, ad partes B infinitè protenſum, majus erit infinito ſpatio KDPRB, ut ſuperiori numero concludebamus, adeòque major erit ratio KDXLZB ad ſecundum, quàm ad primum, ad quod tamen eſſe poteſt in quavis aſſignabili ratione DK ad *K*O, ſive *m* ad *n*; unde liquet, ſpatium KDXZB infinitè adhuc majus eſſe ſpatio *K*DPRB ab hyperbola quadratica comprehenſo, licèt pluſquàm infinitum hoc ipſum anteà deprehenderimus. Quod &c.

3. Et ſi quælibet ipſarum GP, KD poteſtates ab exponente *e* indicatæ reciprocè reſpondeant abſciſſis, ordinatiſve alterius hyperbolæ GX, KD ad poteſtatem unitate ſuperiorem elevatis, ſemper his ipſis ordinatis in V, & O proportionaliter ſectis, curva OVQ occurret priori hyperbolæ DPR in I, ubi correſpondebit ordinatæ poſte-

rioris hyperbolæ H L, quæ sit ad K D, ut potestas e ipsius K O ad potestatem similem ipsius K D, unde renovabitur semper precedens argumentum; idque generatim sic ostendetur. Sit K D $= a$ & hyperbolæ D X Z ordinata quævis G X, aut H L ponatur $= y$, quæ si proportionaliter secentur in O, V per curvam O V Q in ratione m ad n, occurrat hæc curva in I alteri hyperbo D P R, cujus ordinata quævis G P, H I $= z$; ergo in concursu I fiet $z = \frac{ny}{m}$, & $z^e = \frac{n^e y^e}{m^e}$; estque z^e ad a^e, ut y^{e+1} ad a^{e+1}, ergo $\frac{n^e y^e}{m^e}$ ad a^e, ut y^{e+1} ad a^{e+1}, & $n^e y^e a^{e+1} = m^e a^e y^{e+1}$, & rursus dividendo per $y^e a^e$, erit $n^e a = m^e y$, indeque y ad a, ut n^e ad m^e, nempe ut potestas e ipsius K O ad similem ipsius K D potestatem; Quod &c.



COROLL. I. Hinc constat, omnes hyperbolas altioris gradus supra Apollonianam verè *Plusquam — infinitas* juxta VVallisii appellationem, & doctrinam censendas; utpotè infinities majores areis hyperbolicis ordinariis ad asympto-ton resectis: & quantumvis proportionali augmento, aut decremento singularum ordinatarum, augeantur istæ, minuantur illæ, numquam hyperbolas unius generis posse cum hyperbolis alterius generis comparari.

COROLL. II. Consequens etiam hinc est, in Arearum dimensione non sufficere, ut quædam illarum absolutè infinitæ demonstrentur, sed ampliùs requiri, ut ostendatur ad quem infinitorum ordinem, aut gradum pertineant: Quod facile est, observando ad quod infiniti aliunde noti genus rationem assignabilem habere possint. Verbi gratia.

Spa-

Spatium, à Conchoide Nicomedea cum asymptoto contentum, infinitum est ejusdem generis cum Spatio asymptotico hyperbolæ Apollonianæ, cui comparari potest *ex prop. 21. nostri libelli de Quadr. Circ. & Hyperb.* Item spatium à Quadratice Dinostrati ultra quadrantem continuata, & ab ejus asymptoto comprehensum, ad eandem classem spectat, ut ex ejus comparatione cum hyperbola Apolloniana, quam alibi exhibebimus, constare potest. Spatium quod curva Logarithmica, & recta ad ejus asymptoton parallela interiicitur, ejusdem ordinis est cum parallelogrammo infinitæ longitudinis, sed infinities minoris, quàm sit asymptotus Apollonianæ hyperbolæ. Spatium hyperbolicum, circa axem infinitè productum excurrens, ejusdem ordinis est cum infinito spatio angulari. Area curvæ, quæ ab Insigni Geometra Hieronymo Sacherio in *Neostatica lib. 3. pr. 10.* infinita demonstratur, ad asymptotici spatii, quod Apollonii hyperbola complectitur, classem pertinere imò ad ejus dimensioné referri ostenditur: atque ita de aliis.

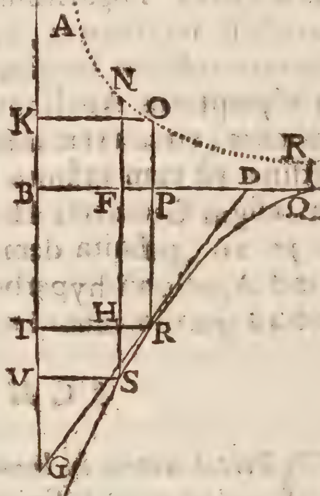
SCHOLION I.

Oportet autem in horum Spatiorum comparatione supponere eadem æquè infinitè *in longum protensa, aliàs Infinitum ordinis inferioris æquari poterit Infinito superioris ordinis ad infinitam longitudinem inferioris gradus, seu priori infinities minorem applicato; Cùm enim Spatium asymptoticum hyperbolæ Apollonianæ sit infinitum, utique æquivalet parallelogrammis inscriptis multitudine infinitis, quæ si ad parem latitudinem componantur, efficient utique parallelogrammum infinitè longum, ipsi hyperbolico spatio æquale; sed hæc ipsa infiniti parallelogrammi longitudo inferioris ordinis erit, sive infinities minor infinita longitudine spatii hyperbolici: unde non mirum, quòd hoc modo simul utraque spatia adæquentur.*

At comparando parallelogrammum æque infinitè longum, ac sit

hyperbolicum ſpatium, quamlibet exigua fuerit parallelogrammi latitudo, ſemper, ex demonſtratis, erit parallelogrammum infinities majus ſpatio hyperbolico, quod ipſi aſymptoto adiacet: idemque intelligas de aliorum, quæ enumeravimus, ſpatiorum comparatione.

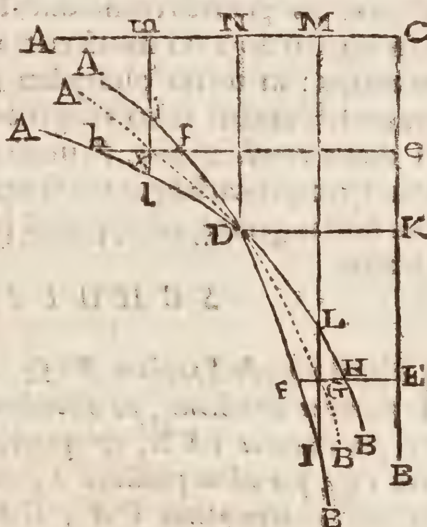
COROLL. III. Undè adhuc habetur, infinitam aſymtoton Logarithmimicæ, ſeu Logiſticæ, infinitè minorem eſſe infinita aſymptoto hyperbolæ Apollonianæ. Nam quia Logiſticæ Q R S ſubtangens G T eſt ad quamlibet axi parallelam, P R, adeoque & quadratum T G ad rectangulum T G in P R, ut rectangulum hyperbolæ inſcriptum KOPB ad ſpatium hyperbolicum QR OP (ordinatis Q R, P O interceptum) *ex cap. 6. Hugenian. n. 6.* fit, ut ſi parallelogrammum hyperbolæ inſcriptum æquetur quadrato T G, etiam ſpatium quodvis hyperbolicum O P Q R æquetur T G in P R, adeòque totum infinitum Spatium hyperbolicum A R Q B A æquabitur rectangulo ejuſdem T G in aſymptoton Logiſticæ infinitè productam B G; Quare, ex præcedenti, erit longitudo ipſius B G infinitè minor longitudine aſympoti hyperbolici B A.



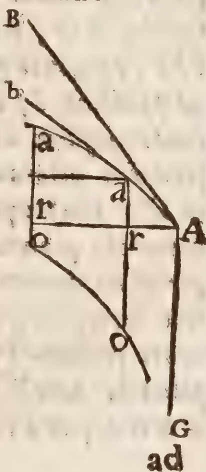
S C H O L I O N II.

IMò obſervatione dignum eſt, Spatia quævis aſymptotica finita, longitudini quidem infinitæ adiacere, ſed infinitè ſemper minori, quàm ſit aſymptotus hyperbolæ Apollonianæ; Nam & altiores hyperbolæ [in figura ſequenti] *AfDFB, qua parte ad aſym-*

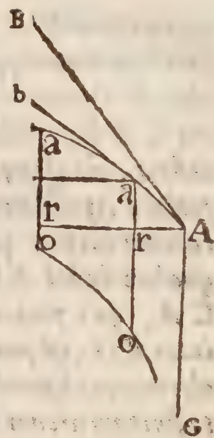
asymptoton C A spatium finitum comprehendunt, asymptoton infinitè minorem, quàm sit hyperbolæ asymptotus, obtinent; eo quòd, cùm sit semper ef *media inter K D*, eg, *erit etiam asymptotus C A hyperbolæ quadraticæ* fDF, *quæ parte finitam aream definit, ad asymptoton C A hyperbolæ Apollonianæ* gDG, *in ratione minori qualibet data, qualem habet K D ad priorem C A, quæ proportione mediat inter K D, & postremam C A; altioresque hyperbolæ, quæ parte finitam aream adhuc minorē cum asymptoto comprehendunt, habebunt, eadem ratione, asymptotos adhuc infinities minores, sive ad inferiorem gradum infinitatis consistentes. Similiter in Cissoide, in Correlata quadrantis, aliisque curvis asymptoticis, finitam areā comprehendentibus, observare erit, infinitā asymptoti longitudinem infinities minorem esse asymptoto hyperbolæ Apollonianæ.*



COROLL. IV. Hinc etiam elici potest modus investigandi, quando Spatium quoddam asymptoticum AroοG aream finitam comprehendat, quando verò infinitā, vel adhuc plusquam infinitam, respectu ordinarii loci hyperbolici inter asymptotos jacentis, intercipiat: Si nempe spatio A*roo*G fiat reciproca figura A*aar*, cujus scilicet ordinatæ *ra* contineant cum ordinatis *ro* rectangulum eidem constanti quadrato æquale; nam si tangens *ab* hujus figuræ reciprocæ quæratur, & ejus generalis expressio referatur



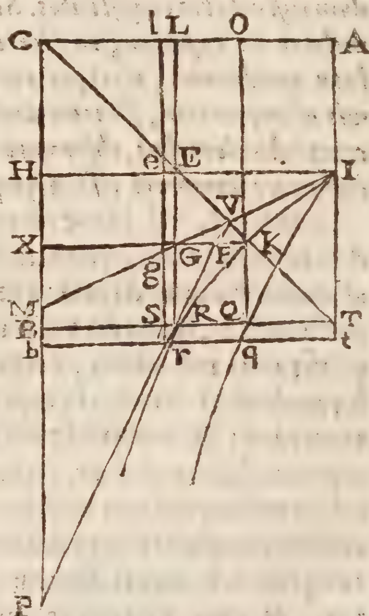
ad



ad verticem A, conſtabit certè, an ibi tangens AB fiat ordinatæ *ra* parallela, an verò cum ipſa concurrat, in diſtantia finita ab axe A*r*, an autem cum ipſo axe A*r* penitus coincidat; & in primo caſu Spatiũ A*roo*G finitũ erit: in ſecundo infinitum: in tertio pluſquàm infinitum. Innoteſcit autem ratio tangentes ducendi ex dictis *coroll. 2. prop. V.* undè generatim liquet, reciprocarũ figurarũ ſemper ęquales fore ſubtangentes, ad oppoſitã partẽ accipiendas.

SCHOLION III.

Infinitum eſſe Spatium RIQ, quo ſecunda hyperbola extra primam exorbitat, ſic oſtendemus. Duæ hyperbolæ, Apollonia-na, ſeu linearis IKR, & quadratica IQ, per idem punctum I, inter eaſdem aſymptotos CA, CB, ſint deſcriptæ. Ordinetur qualibet BRQT, ſecans lineas, ut in figura. Ducatur aſymptoto CB parallela RG, occurrens in G rectæ IM, tangenti priorem hyperbolam ad punctum I; & ducta RP, tangente ejuſdem ad punctum R (quæ producta alteram tangentem ferit in V) acceptoque in eadem prima hyperbola quamvis proximo puncto r, *per illud agantur coordinatis parallelæ* brq, rSg; *ac juncta CT ſecante primam hyperbolam in K, compleantur parallelogramma COKX, CBRL, AIHC. Jam propter AI,*



ſive

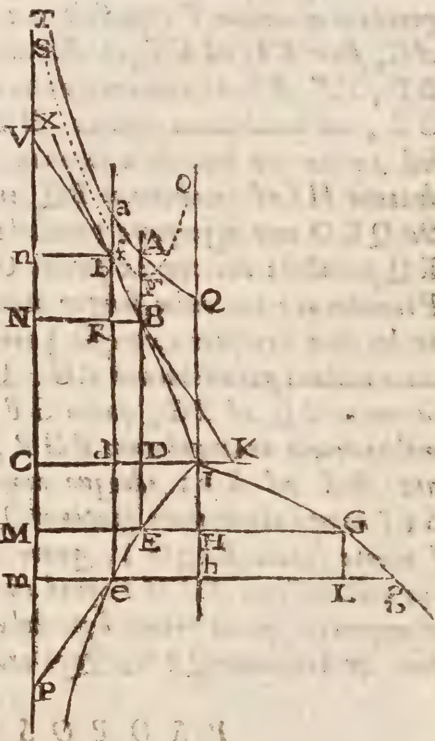
sive CH ad CB, ut BR, sive HE ad CA vel BT, erit parallelogrammum CHEL simile ipsi CBTA, adeoque circa eandem diametrum CT consistet; quare & CT erit diameter hyperbolæ RKI, ut potè bisecans subtensam RI, quæ altera diameter est parallelogrammi ERTI, quare eadem CT per tangentium occursum V transibit: ex 29. 2. Conic. Præterea cùm sit AC, sive BT, ad KX, ut BC ad CX, sive ut KX ad BR, erunt BT, XK BR in continua ratione, & BT vel HI ad tertiam BR, ut quadratum primæ HI ad quadratum mediæ XK; sed ex natura hyperbolæ secundæ, ut HI ad RB, ita & quadratum HI ad quadratum BQ, ergo XK æquatur BQ, & juncta QKO erit asymptoto parallela. Cùm sit autem GF (quæ ipsi RQ parallela ducitur ex puncto G, & à tangente RV in puncto F limitatur: nec enim semper coincidet GF cum ordinata KX, ut hoc loco Sculptor expressit] minor semper ipsa RQ, metiente intervallum parallelarum RG, QK; consequens est, ut major sit ratio RQ ad RG, quàm GF ad eandem RG, vel (ob similitudinem triangulorum FGR, RBP] quàm RB ad BP, aut RS ad Sr; ideoque majus erit rectangulum QR in Sr (nempe elementare spatium Qq r R) rectangulo GR in RS (nempe spatio RrgG); quare & totum bilineum QIR majus erit trilineo RIMP: quod cùm sit infinitum [ob infinitatem asymptotici spatii primæ hyperbolæ] patet à fortiori infinitum fore & bilineum QIR; Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO X.

Spatium Infinitum, idemque infinities minus Asymptotico Spatio Apollonianæ Hyperbolæ, reperire.

Ne quis suspicetur, spatium asymptoticum hyperbolæ Apollonianæ minimum esse omnium infinitorum spatiorum, quia nullam hactenus aream novimus infinitam, quæ aut ejusdem, aut superioris gradus non sit ad prędictum spatium: libet hoc loco aream describere, absolutè quidem infi-

infinitam, ſed infinities minorem dicto aſymptotico ſpatio Apolloniano: ex quo facile erit ſimiles areas adhuc infinities minores excogitare, & aſſertam varietatem ordinis Infinitorum *ſine ullo limite* (ut *prop. VIII.* prędiximus) admittendam oſtendere.



Inter aſymptotos C I, C V deſcripta ſit hyperbola Apolloniana Q A *a* T, abſcindés primam ordinatam Q I ęqualem I C; & ſubtangente C I agatur Logarithmica I E *e* ad axem C P, cui parallela poſita I H, fiat ad axem I H parabola I G *g*, cujus latus rectum ſit duplum ipſius C I, & productis ejus ordinatis G H, *g h*, logarithmicę occurrentibus in E, *e*, ejuſque axi in M, *m*, agantur ad axem parallelę E D A, *e d a*; tum ut rectangulum ex M E in H G ad quadratum C I, ita ſit eadem C I vel I Q ad D F, ac per omnia puncta F, *f* ſic determinata tranſeat curva O F *f* S. Dico ſpatium binis aſymptotis parallelis I O, C S, curva O F *f* S, & recta C I comprehenſum, abſolutè quidem eſſe infinitum, ſed infinities minus ſpatio hyperbolico C I Q A *a* T.

Facta enim D B æquali H G, itemque *d b* æquali *b g*, atque ita ſemper, oriatur hinc alia curva I B *b* X; ſintque A F B D E H G, *a f b d e h g* infinitè proximæ: erit ipſarum B D, *b d* differentia *b* R, ex conſtructione, æqualis differen-

tiæ

tiæ Lg correſpondentium HG, hg; eritque BR ad Rb, ut BR ad Lg, nempe in ratione compoſita ex BR, ſeu Dd differentia ordinatarum Logarithmicæ, ad Hb, ſive Mm differentiam axis ejuſdem, & ex Mm, ſeu GL differentia axis parabolæ ad Lg differentiam ordinatarum ejus; eſt autem *ex coroll. 2. prop. V.* prima ratio æqualis rationi ordinatæ ME ad ſubtangentem MP vel CI, & ratio altera æqualis rationi ſubtangentis parabolæ, ſeu duplæ IH, ad HG, vel duplæ HG ad latus rectum, aut ſimplicis HG, ad CI ſemiſſem lateris recti; ergo BR ad Rb eſt in ratione compoſita ex ME ad CI, & HG ad CI, ſcilicet ut rectangulum ex ME in HG ad quadratum CI, hoc eſt, ex conſtructione, ut CI, vel IQ ad DF; quare extremarum rectangulum ex FD in BR (quod eſt idem cum ſpatiolo infinitè parvo $FDdf$, *per coroll. 3. prop. V.*) æquabitur rectangulo mediarum IQ vel CI in Rb; quod cùm ubique perpetuò obtineat, manifeſtum eſt, totum ſpatium $SfFOIC$, ex omnibus areolis elementaribus $FDdf$ aggregatum, æquari rectangulo ex IQ vel CI in totam aſymptoton CX, quæ omnibus differentiis Rb ordinatarum æqualis eſt: adeoque cùm CX ſit infinita, utpotè æqualis ordinatæ parabolæ ad infinitam diſtantiam à vertice, patet, ſpatium illud $SfFOIC$ rectangulo infinito æquale probari, & ſic eſſe abſolutè infinitum: ſed hyperbolicum ſpatium $CIQAaT$ æquatur rectangulo ex eadem IQ, vel CI in totum axem infinitum CP Logarithmicæ (nam, *ex cap. 6. Hugenianorum n. 6.* ſubtangens CI eſt ad quamlibet DE parallelam axi Logiſticę, vel dicas CI quadratum ad CI in DE, ut parallelogrammum hyperbolę inſcriptū CDA, quod ęquatur quadrato CI, propter QI æqualem CI, ad ſpatium hyperbolicum $AQID$, quod exinde ęquabitur in hoc caſu rectangulo ex CI in DE, adeoque totum ſpatium aſymptoticum fiet æquale rectangulo ex CI in totum axem CP) erit ergo ſpatium $CIQAT$ ad ſpa-

tium SFOIC, ut infinitus axis Logarithmicæ, vel parabolæ, ad infinitam ejus ordinatam, sive ut hæc ipsa infinita parabolæ ordinata ad suum latus rectum; adeoque in ratione majori, quàm quælibet assignabilis, quarè inventum est spatium absolutè infinitum, sed idem infinities minus asymptotico spatio hyperbolæ Apollonianæ. Quod erat &c.

COROLL. I. Hinc obiter patet, curvæ I B *b* subtangentem K D esse ad ordinatam D B, ut rectangulum M E in H G, sive N C D B, ad quadratum C I: in hac enim ratione vidimus esse differentias B R, R *b*, quæ sunt subtangenti, & ordinatæ proportionales ex supradictis.

COROLL. II. Unde etiã extensa tangente *K* B ad asymptoton in V, erit pariter BN ad NV (seu sumpta communi altitudine N C, rectangulum NCDB ad rectangulum CNV) ut rectangulum N C D B ad quadratum CI; quare quadratum CI ęquabitur CNV rectangulo, & subtangens N V æquatur constanti quadrato C I, diviso per abscissam N C, idest reciproca est abscissæ N C, aut dicas æqualis ordinatæ in puncto N ad hyperbolam T A Q, usque dum illi occurrat, continuatam, quippe quæ pariter ejusdem N C est reciproca.

COROLL. III. Si quis ex puncto B duceret curvæ I B *b* perpendicularem, foret subnormalis, post ordinatam B D

in

in ipsa DC producta ab hac perpendiculari resecta, æqualis ordinatæ DA hyperbolæ: etenim est VN ad NB, ut BD ad DK, vel ut prædicta subnormalis ad ordinatam BD seu CN, adeoque rectangulum extremarum VNC [hoc est, *per præcedens corollar.* quadratum CIQ, vel rectangulum CDA, ob hyperbolam) æquatur rectangulo mediarum NB, vel CD in subnormalem, quare eadem subnormalis æquatur AD ordinatæ ad hyperbolam.

COROLL. IV. Unde ampliùs ostendi potest, spatium hyperbolicum AQID æquari dimidio quadrati ex ordinata BD: posita enim $CD = x$, $DB = y$, & dicta subnormali $= p$; erit p ad y, ut dy ad dx (nempe ut Rb ad RB) quare pdx [sive, ob $p = AD$, spatium ADda] $= ydy =$ dimidio differentialis $2ydy$, quæ *ex Schol. prop. V.* est differentia quadrati yy; & ideo, integrando, totum spatium AQID æquatur dimidio quadrati BD. Quod & hinc expeditiùs patet, quia ex ostensis in demonstratione hujusmet propositionis, spatium hyperbolicum AQID æquatur rectangulo ex CI in DE, vel IH, quadratum autem BD, vel HG, ex natura parabolæ, æquatur rectangulo ex eadem IH in duplam CI, quæ est latus rectum, ergo idem spatium hyperbolicum AQID est dimidium quadrati HG, vel BD.

SCHOLION

M*Anifestum est, curvam IB*b *esse Logarithmicam quadraticam, ex earum genere, quas* Hugenianorum cap. 1. n. 4. *indicavi, de quibus & egregium tractatum, genesi à nobis perhumaniter accepta, conscripsit insignis Geometra* Laurentius Lorenzini, *quem utinam cum aliis tractatibus, res geometricas accuratissimè, & profundissimè illustrantibus, typis aliquando committeret! Enimverò patet, quòd cùm in prima Logarithmica IE*e *sit ratio IC, ME ad rationem IC,* m e, *ut*

CM ad Cm , *vel IH ad* Ih: *cujus rationis subduplicata est ratio ipsarum HG*, hg, *seu BD*, bd, *patet fore BD ad* bd, *sive NC ad* nC, *in subduplicata ratione ejus, quam habet ratio duarum CI, NB ad rationem duarum CI*, nb; *aut illam rationem ad hanc esse, ut quadratum distantiæ CN ad quadratum distantiæ* Cn. *Similiter, si loco parabolæ quadraticæ IG*g *posita fuisset alterius altioris ordinis parabola, ex ejus ordinatarum HG translatione in DB, orta fuisset altioris adhuc ordinis logarithmica, ejusque tangens, & aliæ functiones simili investigatione detegerentur.*

PROPOSITIO XI.

Quadraticæ hyperbolæ cum Apolloniana specialior comparatio, ad ejus altiorem infinitatem demonstrandam.

Sit inter asymptotos RCA [*ut in figura sequenti*] per angulum P quadrati RPAC descripta hyperbola Apolloniana PKV, & hyperbola quadratica PQY, in qua sit SQ ad RP, ut quadratum RC ad quadratum CS, vel ut quadratum SK ad quadratum RP, adeoque tres SQ, SK, RP sint perpetuò proportionales; descripta sit etiam ad axem ACT Logistica RBG, ad partes G decrescens, cujus

jus ſubtangẽs TD ęquetur CR: itéq. facta CH æquali CR, ponatur HNL continuatio ejuſdem Logiſticæ, quæ ex R ad partes AP exporrigi debebat, ad eaſdem partes aſymptoti CT reflexa, & eò verſùs in infinitum ſe expandens. Itaq. ob æqualem, imò eandem axis portionem CD, ordinatis BD, CR, & CH, DN interceptam, erit ſemper DB ad CR, ut CR vel CH ad DN, ſed etiam ut DB vel CS ad CR, ita in hyperbola Apolloniana RP (vel CR aut CH) ad SK, ergo DN æquatur ſemper correſpondenti ordinatæ hyperbolicę SK: factaque *ndbsq* infinitè proxima priori; cùm ſit SQ ad SK, ut SK ad RP, vel ut AC ad CS, vel ut TD ad DB, vel ut B6, aut D*d*, ad 6*b* vel *s*S, erit rectangulum extremarum QS*s* æquale rectangulo mediarum, ſcilicet SK, vel ND in D*d*, & ſic ſemper, unde ſpatium hyperbolæ quadraticæ SRPQ *per coroll. 3. prop. V.* æquale oſtendetur correſpondenti ſpatio Logiſtico NHCD; ſed ex oſtenſis *in demonſtratione prop. præced. & in coroll. 3. prop. IX.* Spatium hyperbolicum SRPK æquatur rectangulo ex CR in logarithmum CS, ſcilicet in BS. hoc eſt, ducta HMI aſymptoto parallela, æquatur rectangulo correſpondenti CHMD, ergo ſpatia SRPQ, SRPK ſunt ſemper ad invicem, ut NHCD, MHCD; & ubi punctum S cadit in C, erit totum ſpatium hyperbolæ quadraticæ CRPQY ad ſpatiũ Apollonianæ CRPKV,

ut

tit logisticum spatium TCHNL in infinitam amplitudiné TL infinitæ longitudini CT respondentem diffusum, ad rectangulum infinitè longum TCHI; sed illud est infinities majus hoc, nam ex ipso secari possũt quot quis voluerit æqualia rectangula infinitè longa TCHI, IMZE, &c. ergo & Spatium hyperbolæ quadraticæ CRPQY est infinities majus spatio Apollonianæ hyperbolæ absolutè infinito CRPKV, adeoque jure potuit à VVallisio *Plusquam infinitum* nuncupari. Quod erat &c.

COROLL. I Cûm *ex nostris Hugenianis cap.* 3. *n.* 6. Spatia Logistica æquè alta NDCH, BDCR sint ad invicem, ut homologæ ordinatæ CH, BD, sive ut rectangulum CHMD ad rectangulum CDBS, & permutando spatium NDCH ad CHMD, hoc est, juxta hanc propositionem, spatium SRPQ ad SRPK, erit, ut spatium logisticum BDCR ad inscriptum rectangulum CDBS.

COROLL. II. Extensa tangente TB usque ad CR in X, quoniam ex dictis *Hugenianor. cap.* 7. *n.* 3. & *cap.* 10. *n.* 8. rectangulum CDBS æquatur rectangulo subtangentis DT, vel CR in SX, & spatium BDCR *ex ibidem dictis cap.* 4. *n.* 3. & *cap.* 8. *n.* 14. æquatur rectangulo ejusdem subtangentis in SR, erit itaque spatium SRPQ ad spatium SRP*K* ut SX ad SR.

COROLL. III. Unde rursus liquet, integrum spatium hy-

hyperbolæ quadraticæ CRPQY esse infinities majus spatio Apollonianæ CRPKV, adeoque *plusquam infinitum* censendum; etenim ubi S cadit in C: tum rectangulum CDBS evanescit, aut saltem fit infinitè minus spatio integræ logisticæ TCRBG, seu quadrato subtangentis CR: tum ipsa SX evadit infinitè parva respectu SR, quæ tunc fit CR; undè spatiũ hyperbolę Apollonii CRPKV, evadat infinities minus spatio hyperbolæ quadraticæ CRPQY necesse est.

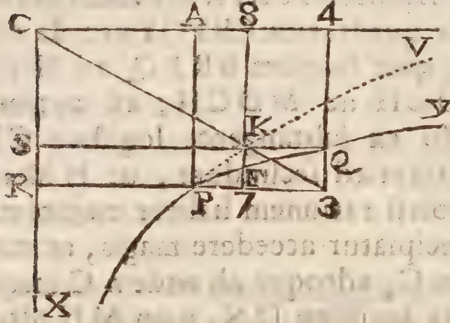
COROLL. IV. Rursus, quia spatium SRPQ ad SRPK ostensum est esse, ut NDCH ad MDCH; est autem NDCH æquale rectangulo ex subtangente logisticę CH in MN, erit primum spatium ad secundum, ut NM ad MH; sed NM ad MH potest rationem habere majorem qualibet assignabili, si concipiatur accedere magis, ac magis punctum S ad centrum C, adeoque ab eodem C magis ac magis recedere ordinata logisticæ DN, nam MN ultra tangentem HZ, quæ ad angulum semirectum ZHM, sive HAC inclinatur, in immensum exscrescit, unde ratio NM ad MZ, vel MH, semper fit major, prout (juncta NH*a*) fit semper sine limite major ratio HC ad C*a*; ergo NM evadit infinities major, quàm MH, ubi punctum S cum puncto C convenerit, & ideo spatium CRPQY erit tunc infinities majus ipso CRPKV, ac proinde *plusquam infinitum* hac etiam ratione colligitur.

SCHOLION.

EX ostensis in hac propositione, quòd DN, ordinata figuræ HNL, sit semper æqualis correspondenti SK, ordinatæ hyperbolæ PKV, colligitur expeditus modus generalis describendi datæ cuilibet figuræ RBG suam Reciprocam HNL: descripta enim hyperbola Apolloniana PKV, quia semper rectangulum CSK æquatur ipsi CRP, fit, ut si ad puncta D, C ordinentur ipsę DN, CH æquales respectivè ipsis SK, RP, utique etiam rectangula NDB, HCR æquentur, adeoque figura HNL evadat Reciproca ipsius RBG. PRO-

PROPOSITIO XII.

I*Dem aliter rursus, ad abundantiorem scientiam, demonstrare.* Iisdem positis, ducatur C *K*, conveniens cum R P producta in 3, & jungatur 3 Q occurrens asymptoto C A in 4; eritque R 3 ad S *K*, ut R C ad C S, ut S *K* ad R P, vel ut S Q ad S *K*; igitur æquales erunt R 3, SQ, unde 3Q4 erit asymptoto R S C parallela, cui per *K* æquidistans pariter fiat 7 *K* 8; Jam verò ex demonstratis *cap.* 8. *Hugenianorum*, *n.* 11. Spatium infinitè longum, ab hyperbola quadratica P Q ad partes asymptoti S R versùs X infinitè producta comprehensum, est finitæ quantitatis, & semper æquatur inscripto rectangulo eidem ordinatæ adiacenti, nempe RSQPX æquatur CSQ4, & solum R P X æquatur C R P A, vel huic æquali C S K 8; ideoque utriusque differentia, nempe spatium SRPQ æquatur residuo 8 4 Q K, vel æquali complemento S K 7 R, quod eidem latitudini S R adiacet cum spatio SRPQ, sed longitudinem habet æqualem applicatæ correspondenti S K hyperbolæ Apollonianæ, atque ita semper; ergo ubi congruerit S K asymptoto C A, fiet integrum spatium C R P Q Y æquale rectangulo ex C R in asymptoton hyperbolę Apollonii CAV; sed hoc rectangulum, *ex prop. VIII. n.* 2. est infinities majus spatio asymptotico hyperbolæ Apollonii, ergo spatium C R P Q Y quadraticę hyperbolę est infinities majus dicto spatio Apollonianę hyperbolæ, unde à Cl. VVallisio jure *Plusquàm Infinitum* dici potuit. Quod erat &c.



CO-

COROLL. I. Ex quo spatium SRPQ ostensum sit æquale rectangulo SK7R, ablato communi SRPEK, erit KEQ = ipsi KEP, & apposito communi 7EQ3, fiet PEQ3 æquale K73Q.

COROLL. II. Unde & spatium SRPQ ad PEQ3 erit, ut SKQ4 ad 7KQ3, nempe ut CS ad SR, & componendo, RSQ3 ad PEQ3 erit, ut CR ad RS, ac per conversionem rationis, RSQ3 ad SRPQ, ut CR ad CS.

COROLL. III. Quia verò spatium SKPR = rectangulo ex CR in logaritmum CS (*vide fig. pag.* 70.) nempe in SB *ex coroll.* 3. *prop. IX.* erit SKPR ad SQPR in ratione composita ex CR, vel RP, ad SK, & ex logarithmo CS, nempe SB, ad SR, ideft in composita ratione ex SC ad CR, & SB ad SR, hoc est ut rectangulum Logisticæ inscriptum CSBD ad rectangulum ex CR in RS, sive ad Logisticum spatium CDBR: quod consonat jam ostensis *coroll.* 1. *prop. præced.* unde rursus eadem inferri possunt, quæ deinceps in sequentibus corollariis demonstrata sunt de *altiori Infinitate* hujus spatii.

SCHOLION.

HActenus multipliciter probavimus diversitatem ordinis Infinitorum a Varignonio controversam, idque iis argumentis, quibus subesse posse hallucinationem, de sumenda expressione spatiorum ejusmodi ad contrarias partes, omninò non video; hac enimverò exceptione Vir gravissimus usus est adversùs VVallisium, scilicet ipsum non observaße, negativum valorem arearum hyperbolicarum superiorum Apolloniana, non indicare altiorem infinitatem ipsarum, sed contrariam dumtaxat positionem, adeout finitam quidem quantitatem exprimat, sed ad oppositas partes accipiendam: quod ipsum antea monuerat Georgius Cheynæus *Collega noster, libro Londini impresso* 1703 De Methodo Fluxionum inversa, pag. 66. *his verbis*: Quodsi quadraturæ ex-

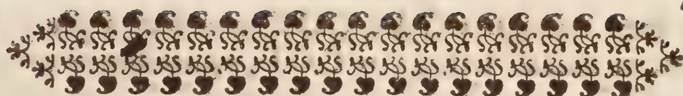
 pres-

pressio affirmativa fuerit, area adjacet tam abscissæ, quàm ordinatæ: sin negativa fuerit, cadit ad partes contrarias, & adjacet abscissæ ultra ordinatam productæ: *ubi etiam statim subdit exemplum* infinitarum hyperbolarum. *Quam sanè legem nos minimè improbamus, & saltem in hyperbolarum casu (ex accidentine, an suapte generali natura, hic non inquiro, sed vide dicenda infra* in Epist. subjuncta post Lemm. 12.) *obtinere fatemur: quemadmodum & idem, independenter à Cheynai libello ipsis nondum viso, animadvertendum censebant anno* 1704 *Doctissimi Viri, quos Bononiæ conveneram, & quibuscum de hac Infinitorum materia, deque natura negativarum quantitatum in Marsiliano Musæo disserebam, videlicet* Eustachius Manfredi *Matheseos Profess. celeberrimus, &* Victorius Stanchari, *quem Geometria, Analytica, Physica, & Astronomia sibi nunc [heu nimis immaturæ!] mortis invidia præreptum dolent; neque tamen magnitudinum plusquàm infinitarum existentiam negabat ullus ipsorum, sed varios infiniti gradus exprimendos potius arbitrabatur Stancharius per rationem* aa *ad* o, *aut* a^3 *ad* o, *vel* a^4 *ad* o *&c. (seu per duplicatam, triplicatam, quadruplicatam &c. rationis simpliciter infinitæ* a *ad* o) *quàm per rationem positivi ad negativum,* a *ad* -1, *vel* a *ad* -2; *neque enim signum negativum reddere quantitates nihilo minores, ut multis ratiociniis confirmabat, sed ad partem oppositam dumtaxat retrocedentes: quare & expressionem negativam hyperbolarum plusquam infinitarum, verificari satis, accipiendo ipsarum aream ad plagam oppositam, ubi valor ipsarum finitus est. Extant adhuc apud me doctissimi Juvenis epistolæ, quas post meum in Ethruriam reditum,* 13 *Junii,* 10, *&* 24 *Julii dicti anni* 1704, *his de rebus transmisit, ut sententiam suam clariùs exponeret. Sed, hac doctrina admissa, non ideò concesserim Varignonio, aut* Plusquam infinitum *contradictionem involvere, cùm aliunde, quàm per quantitatum nihilo minorum expressionem probari possit, aut in assertione hyperbolarum plusquam infinitarum hallucinatum proptereà fuisse VVallisium, quòd non animadverterit,*

terit, negativas quantitates, aream contraria positione accipiendam significare: nam in Algebra sua cap. 66, & 67 *expressè hanc doctrinam ipsemet VVallisius firmaverat, & disertis verbis* Volum. 2. Op. Math. pag. 286. *dixerat:* Impossibile est, quantitatem ullam negativam esse, impossibile est enim, ut ulla magnitudo sit minus quàm nihil, aut ullus numerus paucior quàm 0. Nec tamen est ea suppositio aut inutilis, aut absurda, modò rectè intelligatur. Quamvis enim quoad puram notationem algebricam, innuere videatur nota — magnitudinem, quæ minor sit, quàm nihil; cùm tamen physicam subit considerationem, magnitudinem non minùs realem denotat, quàm ipsum †; Sed sensu suppositioni contrario interpretandam. Verbi gratia siquis promoveri supponatur 5 passibus; atque tum retrocedere passibus 2; atque tum interroget quispiam, quantò promotior sit factus? Dicetur 3 passibus promotior, propter $5 - 2 = 3$; si autem, postquam processerat 5 passibus, retrocedat passibus 8; atque tum interroget quis, quantò sit promotior? respondebitur $- 3$ passibus [propter $5 - 8 = - 3$) hoc est tribus passibus minùs promotus &c. *Quod & aliis exemplis geometricis deinceps ostendit; itaque non inficiatur VVallisius, negativas quantitates oppositum situm respicere, quoties datam habent positionem, ut qualibet physicæ, & geometricæ magnitudines habent: at si de numeris purè abstractis sermo sit, qui à situ non pendent, quomodo eos Algebra versat: hoc modo, inquam, cur minores nihilo dici non debeant numeri negativi, cùm resultent ex majorum subtractione à minoribus? Si* 4 *ex* 7 *subtraho, video relinqui* †3; *si* 4 *ex* 4 *aufero, relinqui* 0, *seu merum nihil; si* 4 *ex* 1 *auferam, an non minus quàm nihil supererit? an contendam superesse idem, quod superest ablatis* 4 *ex* 7? *hoc certè dicendum foret, si* $- 3$, *quod est residuum subtractionis* 4 *ex* 1, *positivè accipi deberet pro tribus unitatibus majoribus nihilo, sed inversum situm [quem vero situm in his abstractis à materia, & à loco mihi fingam?] servantibus. Quidquid id est, inductum*

saltem à VVallisio, & à præstantissimis Geometris admissum, altiorem Infinitatis Ordinem, hac una Varignonii exceptione [tametsi undecunque solida] non infringi, manifestum est, quippe argumentis tali exceptioni minimè obnoxiis, & ab ejusmodi tricarum, circa negativæ quantitatis naturam succrescentium, controversia non pendentibus, ejusmodi causā hactenus multipliciter propugnatam, & abundè confirmatam hic dedimus. Tanta enimverò semper apud me fuit Cl. Varignonii auctoritas, ut neque uni dumtaxat ratiunculæ fidens ab ejus sententia discesserim, nec nisi postquam, in omnem partem hoc argumento versato, sibimet ubique constans altioris Infinitatis testimonium inde multipliciter exprimere potui, VVallisianæ doctrinæ manus dederim, nec prætermiserim à primis usque initiis suis magni hujus mysterii rationem ex ordine deducere; & cùm Vir. Cl. cui per æstivas ferias hunc Tractatum legendum obtuleram, anceps adhuc animi (quòd nonnulla, quæ ex nostro Hugenianorum Theorematum tractatu, abs se non ante perlecto, pendebant, sibi obscuriora visa fuissent) sententiam suspenderet; prolixa Epistola, in qua expressam Lemmatum omnium huc pertinentium demonstrationem, aliunde quàm ab elementis planis, & conicis non pendentem, proposui, & controversa hyperbolica spatia Plusquam infinita *verè censenda esse inde rursus conclusi, illum denique ad assensum mirabilis hujus veritatis adegi, atque omnem deinde ipsi scrupulum, unam vel alteram difficultatem mihi objectam expediens, penitus ademi. Itaque hanc ipsam Epistolam, Lectorum meorum usui pariter profuturam, hic adnectere placuit, opportunam hujc Tractatui coronidem hac Appendice impositurus.*

EPI-



EPISTOLA GEOMETRICA

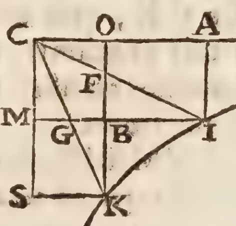
Ad Illustrissimum Equitem

D. ASCANIUM LIPPI

ARETINUM.

REditum tibi in Patriam prosperum gratulor, Vir Illustrissime, teque acriori, quàm antea, studio Geometricarum, ac Mechanicarum rerum contemplationi animum impendere decrevisse, lætus accepi. Interim verò obscuriorem tibi accidisse non paucis in locis Tractatum nostrum, *De Infinitis Infinitorum, atque Infinitèparvorum Ordinibus*, quem superioribus æstivis feriis tibi legendum obtuli, mirari desino, postquàm retulisti, Hugeniana nostra, ex quibus multæ harum demonstrationum pendent, à te minimè hactenus fuisse perlecta; Ne tamen animo despondeas, ad hujus enim admirabilis Veritatis lucem, quam tantoperè tibi manifestari desideras, me facem preferente, statim admitti poteris, ubi nonnullis Lemmatibus id omne supplevero, quod nostræ demonstrationis progressus aliunde perspectum supponit; sit ergo.

LEMMA I. *Ex punctis quibuslibet I, K Hyperbolæ Apollonianæ K I, ductis alteri asymptoto parallelis IA, KO, junctisque ad centrum C rectis IC, KI, erit sector hyperbolicus KCI æqualis quadrilineo OAIK.*



Nam parallelogrammorum CAIM, COKS (*ex* 12. 2. *conic.*) æqualium, dimi-

dimidia ſunt triangula C A I, C O K, quæ ideò æqualia ſunt, & communi ablato triangulo C O F, appoſitoque utrinque trilineo F I K, manifeſtum eſt, ſectorem K C I æquari quadrilineo O A I *K*.

COROLL. Hinc patet quadrilinea KIAO, *K* I M S eidem ſectori C I *K*, adeoque & invicem eſſe æqualia.

LEMMA II. *Sint in aſymptoto C A tres rectæ proportionales C L, C O, C A, & ad hyperbolam ordinentur alteri aſymptoto parallelæ L P, O K, A I: Erit punctum* K *vertex portionis P K I.*

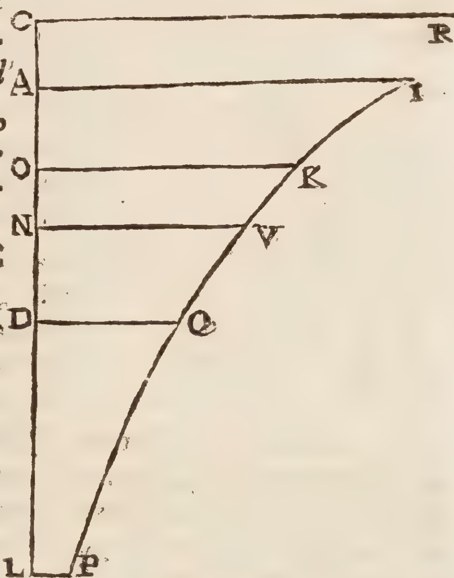
Completis parallelogrammis, ut in figura, erit ex natura hyperbolæ, C L ad C O, ut reciprocè O *K* ad L P, quare etiam ipſa C O ad C A, ut O K ad A T: & ideò parallelogrammum CO*K*S erit ſimile ipſi C A T R, & circa eandem diametrum C T (*26. 6. elem.*) conſiſtet; ſimiliter cùm ſit O *K* ad A I, vel ipſi parallelam L E, ut A C ad C O, vel C O ad C L, erit & parallelogrammum C L E M circa eandem diametrum ipſorum C O K S, C A T R; & quia E T, P I ſunt diametri parallelogrammi E I T P, ſe mutuò ſecabunt in *X*; Igitur recta C X, quæ ex centro biſecat applicatam P I, diameter erit portionis, & per ejus verticem tranſibit; oſtenſa eſt autem tranſire per punctum *K*, ergo K eſt vertex dictæ portionis.

LEMMA III. *Iiſdem poſitis, quadrilinea A I K O, O K P L, quæ ordinatis ad terminos continuè proportionalium intercipiuntur, æqualia erunt.*

Nam

Nam & triangulum XCI æquatur XCP, & portio XKI æqualis eſt portioni XKP, cùm diameter KX biſecet applicatam PI, & portionem PKI: quarè ſectores KCI, KCP, adeoque & quadrilinea AIKO, OKPL, *ex lemm.* 1. æquabuntur.

LEMMA IV. *Si fuerint LC, CD, & OC, CA proportionales, ordinatis inde ad hyperbolam LP, DQ, & OK, AI, intercepta quadrilinea LPQD, OKIA pariter æqualia erunt.*



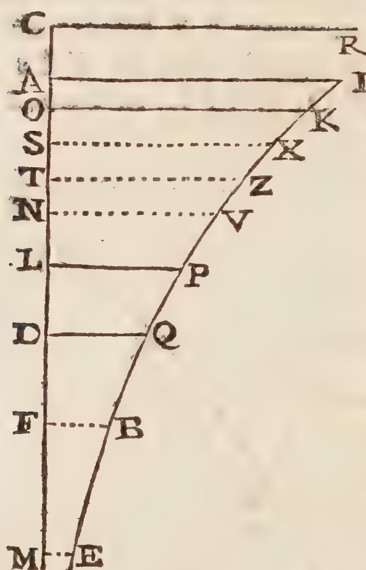
Sumpta inter DC, OC media proportionali NC, hæc media erit etiam inter LC, AC propter rectangulum LCA æquale ipſi DCO, ſeu quadrato CN; ergo ordinata NV, erit *ex lemm. præced.* quadrilineum ANVI æquale quadrilineo NLPV; itemq. ONVK æquale NDQV; quare & reſidua AOKI, DLPQ æqualia manebunt.

LEMMA V. *At ſi major, aut minor foret ratio LC ad CD, quàm OC ad CA, eſſet quadrilineum LPQD majus pariter, aut minus, ipſo OKIA;*

Quippe aucta CL, augeretur primi quadrilinei extenſio, & illa decreſcente hæc pariter minueretur.

LEMMA VI. *Ordinentur ad hyperbolam duæ qualibet AI, OK, & duæ aliæ LP, DQ, erit ratio duarum OC, CA ad rationem duarum DC, CL, ut quadrilineum IAOK ad PLDQ.*

Multiplicetur enim utcunque ratio duarum OC, CA, ſum-



ſumptis quotlibet continuè proportionalibus S C, T C, N C, quibus reſpondebunt, *per lemma* 3. æqualia quadrilinea prioribus ordinatis, aliiſque S X, T Z, N V interiecta: adeò ut quàm multiplicata fuerit ratio N C, A C rationis O C, A C, tam multiplex reſultet quadrilineum N V I A quadrilinei I A O K. Similiter multiplicata utcunque ratione D C, L C per quotlibet continuè proportionales F C, M C, oſtendetur æquè multiplex fore quadrilineum P L M E ipſius P L D Q: & quidem ſi ratio N C, A C æqualis fuerit rationi M C, L C, etiam quadrilineum V N A I *per lemma* 4. fiet æquale ipſi P L M E; ſin prima ratio major, aut minor fuerit ſecunda, etiam *per lemma* 5. primum quadrilineum fiet altero majus, aut minus; quare ut ratio O C, A C, ad rationem D C, L C, ita quadrilineum I A O *K* ad ipſum P L D Q, ob antecedentium æquè multiplicia præfato modo reſpondentia æquè multiplicibus conſequentium, ut exigit terminorum proportionalitas *ex def.* 6. 5. *elem.*

LEMMA VII. *Si recta A C* (ut in fig. ſequenti) *ſecta utcunque in B, iterum ſecetur in D, inter A & B, aut in* d, *inter B, & C, erit ratio duarum B A, D A ad rationem duarum D C, B C in majori proportione, quàm B C ad A B: at ratio duarum* d *A, B A ad rationem duarum B C,* d *C in minori proportione erit, quàm B C ad A B.*

Per terminos A, C ductis parallelis K C N, I A M, & facta C K æquali A I, ex *K*, & I ducantur duæ hyperbolæ æquales K G E F, I *g e f*, inverſo ſitu poſitæ in angulis

aſym-

asymptoticis CAM, ACN, ad quas ordinata per punctum B recta EB*e*, reliquis asymptotis parallela, & per puncta D, *d* pariter ordinatis FD*g*, G*df*, per puncta E, *e* ducantur ipsi AC parallelæ LEH, *leb*; eritque *per lemma 6.* ratio duarum BA, DA, ad rationem ipsarum DC, BC ut spatium FEBD ad DB*eg*, hoc est in minori ratione, quàm [diminuto antecedente, & aucto consequente] quæ sit parallelogrammorum EBDL, *e*BD*b*, sive quàm EB ad B*e*, aut BC ad AB (nam æqualia sunt parallelogramma æqualibus hyperbolis inscripta EBA, *e*BC, adeoque latera habent reciproca) At è contrario ratio duarum *d*A, BA ad rationem ipsarum BC, *d*C est *ex eodem lemm. 6.* ut EG*d*B ad B*dfe*, quæ ratio minor est, quàm (aucto antecedente, & minuto consequente) parallelogrammorum EH*d*B, B*dle*, seu quàm EB ad B*e*, scilicet BC ad AB; & igitur major est in primo, & minor in secundo casu proportio dictarum rationũ, quàm sit ratio partium BC, AB, ut fuit propositum.

LEMMA VIII. *Esto AB ad BC in ratione qualibet*, m *ad* n. *Dico, factum ex potestate ipsius AB, cujus index* m, *in potestatem ipsius BC, cujus index* n, *esse omnium similium maximum, idest majus, quàm si, alibi secta AC in D vel* d, *sumeretur factum ex similibus earum partium potestatibus per eosdem indices denominatis.*

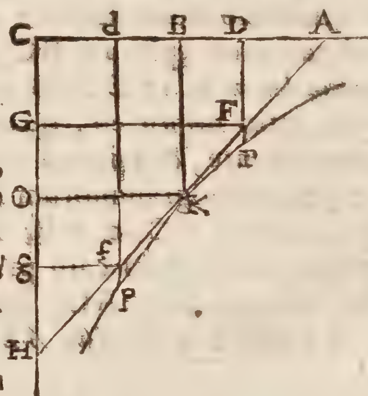
Nam quia ratio duarum AB, AD ad rationem duarum DC, BC est in minori proportione, *per lemma 7.* quàm BC ad AB, idest quàm *m* ad *n* per hypothesim, erit fa-

 ctum



ctum extremorum majus facto mediorum ideſt ratio duarum AB, AD multiplicata per m [ſeu ratio $\overline{AB}^m$ ad ipſum $\overline{AD}^m$] major erit ratione DC, CB multiplicata per n [hoc eſt ratione $\overline{DC}^n$ ad $\overline{CB}^n$] unde rurſus factum extremorum $\overline{AB}^m$ in $\overline{CB}^n$ majus erit facto mediorum $\overline{AD}^m$ in $\overline{DC}^n$. Similiter oſtendetur, quòd cùm ſit rationis duarum dA, AB, ad rationem ipſarum BC, dC, minor proportio, quàm BC ad AB, ſeu quàm n ad m, erit prima ratio multiplicata per m (hoc eſt $\overline{dA}^m$ ad $\overline{AB}^m$) minor ſecunda multiplicata per n (ideſt $\overline{BC}^n$ ad $\overline{dC}^n$) & ideò factum extremorum $\overline{dA}^m$ in $\overline{dC}^n$ minus erit facto mediorum $\overline{AB}^m$ in $\overline{BC}^n$; quare ipſum $\overline{AB}^m$ in $\overline{BC}^n$ eſt omnium ſimilium maximum.

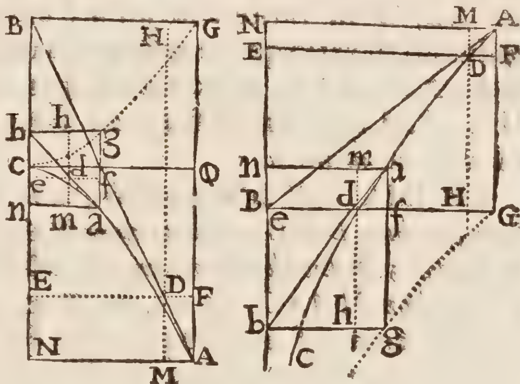
LEMMA IX. *Inter aſymptotos ACH ſit qualibet ex infinitis hyperbolis PKp, cujus ea proprietas, ut poteſtas ordinatæ KB denominata ab* m *, ad ſimilem alterius ordinatæ PD poteſtatem, ſit reciprocè, ut quævis poteſtas abſciſſæ à centro DC, cujus index* n, *ad ſimilem abſciſſæ BC poteſtatem. Dico, quòd ſi fiat AB ad BC, ut* m *ad* n, *juncta AK hyperbolam tanget in K.*



Occurrat AK ordinatæ PD in F; eritque factum ex $\overline{CB}^n$ in $\overline{BK}^m$ ad factum ex $\overline{CB}^n$ in $\overline{BA}^m$, ut $\overline{BK}^m$ ad $\overline{BA}^m$, ſive ut $\overline{DF}^m$ ad $\overline{DA}^m$, vel ut productum ex $\overline{CD}^n$ in $\overline{DF}^m$ ad productum ex $\overline{CD}^n$ in $\overline{DA}^m$; atqui $\overline{CB}^n$ in $\overline{BA}^m$, *ex lemm. præcedenti*, cujus hypotheſi caſus hic congruit, majus eſt quàm $\overline{CD}^n$ in $\overline{DA}^m$, ergo (*per* 14. 5. *elem.*) etiam $\overline{CB}^n$ in $\overline{BK}^m$ (vel $\overline{CD}^n$ in $\overline{DP}^m$, ipſi æquale, ob reciprocam poteſtatum rationem) majus eſt quàm $\overline{CD}^n$ in $\overline{DF}^m$; major eſt igitur DP, quam DF, & ideò pun-

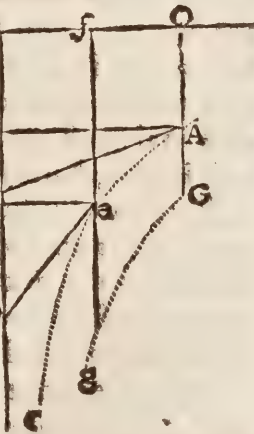
punctum hyperbolæ P eſt ultra rectam K A, idque ubique contingit, ergo A K in ſolo puncto K hyperbolæ occurrit, ipsamque tangendo prætergreditur.

LEMMA X. *In qualibet figura C A N, ſi ad terminos A, a ordinatarum AN*, an, *ordinentur rectæ AG*, a g *axi B N parallelæ, æquales verò reſpectivis ſubtangentibus NB*,nb, *erit figura* Gga*A æqualis figuræ A*anN, *cui correſpondet*.



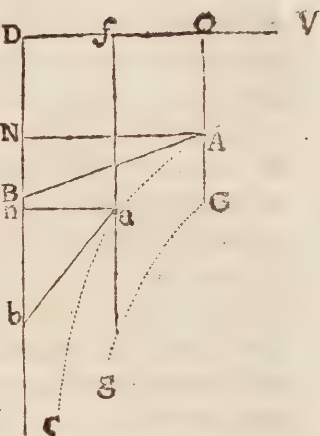
Has figuras *cap.* 8. *Hugenianor. n.* 2 Correlatas appellabam, earumque æqualitatem (ſuppoſitis infinitè proximis G A N, H D E) demonſtravi *ex* 43. 1. *elem.* propter æqualia Elementaria parallelogramma D F G H, D E N M, itemque *dfgh*, *denm*, quæ ſunt complementa parallelogrammorum circa diametrum A B, ſive *ab*. Quare conſtat propoſitum.

LEMMA XI. *Eſto A* a *C qualibet ex infinitis hyperbolis ſupra deſcriptis, & ſint poteſtates ordinatarum A N*, a n, *quarum index* m, *reciproca poteſtatibus abſciſſarum* n *D, N D, quarum index* n, *& ducantur A O*, a f *ordinatæ ad aliam aſymptoton: erit ut* m *ad* n, *ita quadrilineum* N *A* a n *ad quadrilineum O A* a f.



Extenſis enim O A, *fa* ad G, & *g* in ratione *n* ad *m*, fiat alia hyperbola ejuſdem generis G *g*, quæ erit correlata priori, *ut in lemm.* 10. eo quòd AG, *ag* æquentur ſubtangentibus N B, *nb*, ad quas abſciſſæ ND,

 *n*D



*n*D [æquales ipſis OA, *fa*] pariter ſunt *ex lemm.* 9. in ratione *n* ad *m*; quare ſpatium A*ag*G æquatur *ex lemm.* 10. ſpatio A*an*N; eſt autem A*ag*G ad A*af*O in ratione *m* ad *n* (cùm ejuſmodi ſit ratio quarumvis ordinatarũ GA, AO, & *ga*, *af*) quare & ſpatium NA*an* ad ſpatium OA*af* eſt ſemper in ratione *m* ad *n*.

LEMMA XII. *Iiſdem poſitis, erit totum ſpatium DOaC ad portionem NAaC, ut* n *ad* m; *& dividendo rectangulũ DOAN ad ſpatium NA*aC, *ut* n — m *ad* m.

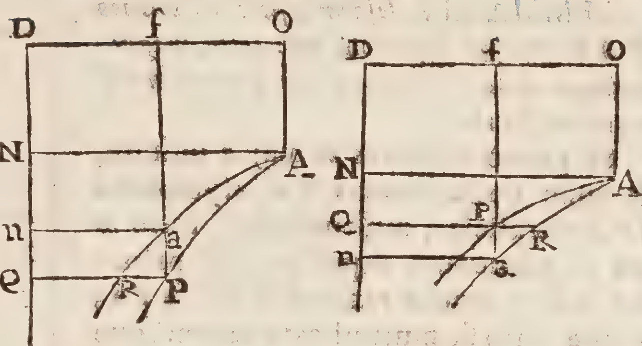
Ubi enim *af* infinitè proxima fiet aſymptoto DN, ſpatium OA*af* degenerabit in DOA*a*C, & ſpatium NA*an* in NA*a*C, quarè cùm ejuſmodi ſpatia OA*af*, NA*an* ſint ut *n* ad *m*, patet integra quoque DOA*a*C, NA*a*C eſſe in eadem ratione, & dividendo inſcriptum rectangulum ad ſubſequentem aream fore, ut *n* — *m* ad *m*;

Nimirum ſi *n* ſit major ipſo *m*, in ratione aſſignabili, quam habet ipſorum differentia ad datum *m* (ut propterea in hoc caſu ſit utriuſque areæ finita ratio); ſi *n* æquatur *m*, ut in hyperbola Apolloniana, ratio prodibit infinitè parva o ad 1. [unde in hoc caſu area hyperbolica infinitè major eſt inſcripto parallelogrammo] ſin fuerit *n* minor ipſo *m*, habebitur ratio minor quàm infinitè parva, quę ſcilicet foret negativi numeri minoris nihilo (appello *minorem nihilo* in hoc caſu negativum numerum, quia non applicantur nunc numeri ad certas quantitates, aliquam datam poſitionem ſervantes, ut ad oppoſitam plagam inverti poſſint, ſed abſolutè conſiderantur, & in abſtracto, tamquam exponentes, qui rationes quantitatum repræſentant, independenter à quolibet ipſarum ſitu) ad unitatem, vel alium numerum poſitivum (unde tunc aream hyperboli-

bolicam plusquam infinities superare inscriptum parallelogrammum Cl. VVallisius contendit) putà si n existente 1 fuerit m æqualis 2, fiet parallelogrammi ratio ad aream hyperbolicam quæ = 1 ad 2: si fuerit m æqualis 3, fiet illa ratio = 2 ad 3, atque ita deinceps; quas quidem rationes, patet non esse subduplam, aut subsequialteram, intercedentem inter aliquem ex terminis, qui comparantur, inverso situ acceptum (ut prætendit Varignonius) & reliquum eodem loco manentem, licèt hoc ipsum verificari contingat, quia nempe area N A a C ad reliquam DNAV, quæ, trans ordinatam, ad partes oppositas vergit, semper invenitur esse, ut $m-n$ ad $n-m$ [ut facilè deducitur ex præmissis, & utramlibet ad inscriptum parallelogrammum, velut ad m, comparando] itaque alterutra est ut differentia exponentium negativa, vel positiva, nempe si m superet n numero b, erit prima ad secundam ut b ad $-b$, sin major fuerit n, quàm m eadem differentia, erit illa ad hanc ut $-b$ ad b, cùm simili lege utraque area ad utramque asymptoton referatur, mutatis dumtaxat ordinatarum potestatibus in potestates abscissarum, & contra; Sed quemadmodùm in casu Apollonianæ Hyperbolæ, cujus ratio ad inscriptum parallellogrammum est n ad $n-n$, sive 1 ad o, non contendit Varignonius, consequens rationis o indicare in antecedenti *nullam magnitudinem* (quasi in ipsam ordinatam A N, unde originem ducit, contraheretur area hyperbolica) sed *absolutè infinitam*, licèt interim in rebus physicis, aut geometricis quantitatibus, datam positionem, ex determinata origine, servantibus, quoties contingit, quantitates illas, puta a, & b, invicem æquari, tunc $a-b$ æquetur o, & in nihilum abeat, sive retrocedens exactè quantitas b ad præcitatam originem ipsius a nec citra consistens, nec ultra procurrens, in ejusdem a principium contrahatur, ibique, in non quantum sui generis degenerans, evanescat: ita in casu altiorum hyperbolarum, ubi ratio paral-

parallelogrammi ad aream hyperbolicam ſubſequentem eſt $n-m$ ad m, ſive -1 ad 2, aut -2 ad 3 &c. non videtur præſumendum, ex negativo antecedente, indicari conſequentis areæ tranſpoſitionem faciendam ad aliam partem ordinatæ, ut paſſim in magnitudinibus ſitum habentibus, ſi ex fixa origine in determinatam plagam protenduntur a, & b, ſitque illa minor, hæc major differentia c, itaut $b = a + c$, tunc $a - b = a - a - c = -c$, & hęc eſt poſitiva quantitas retrorſum ab origine computata, in adverſam partem ab illa, versùs quam ſe extendere a, & b ſupponebantur; Sed imò hinc concludere licet, dictum parallelogrammum ad conſequentem aream, ut minus quàm nihil, comparari, adeo ut hæc illud ſuperet pluſquàm infinitè: quin potius, ſi negativa expreſſio quidpiam invertendum concluderet, ipſum parallelogrammum, quod eſt homologus comparationis terminus quantitatis negativæ -1, aut -2, ſitum mutare deberet, non area hyperbolica, quæ homologa eſt poſitivo termino m exprimenti 2, aut 3 poſitivas unitates; quemadmodum in expreſſione Apollonianę hyperbolæ, ad quam dictum parallelogrammum eſt, ut 0 ad 1, idem parallelogrammum, velut nihilum reputatur reſpectu areæ infinitæ hyperbolicę, non è contrario area hyperbolica in nihilum degenerat: ſed hæc obiter dicta ſint in VVallißiani argumenti defenſionem, cujus cauſa tamen ab hoc puncto non pendet, cùm nec mihi propoſitum ſit ab ejuſmodi analytica expreſſione variorum infinitatis graduum evidentiam repetere (qui ſanè hinc non ſatis commodè elicerentur, alteram aream hyperbolicam alteri ſuperioris ordinis comparando, & in hoc tantùm VVallißii ratio deficere videtur) ſed potius geometrica oſtenſione, ut videbimus, quæ hanc negativi ſigni ambiguitatem nihil moratur.

LEMMA XIII. *Per idem punctum A tranſeant duæ hyperbolæ, Apolloniana AaR, & quædam alia AP, cujus ordinatarum PQ pote-*



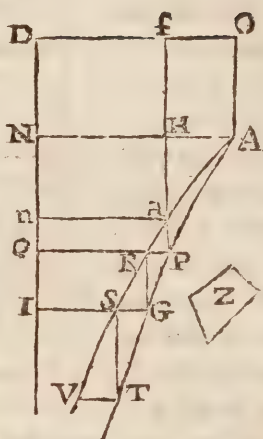
potestas m *reciprocè respondeat abscissis DQ, & ex quolibet ejus puncto P ad asymptotos parallelæ agatur PQ, Pf, occurrentes priori hyperbolæ in R,* a : *erit trilineum RAP ad trilineum Aa P, ut* m *ad* 1.

Cùm in hyperbola Apolloniana quadrilinea AanN, $AafO$ sint æqualia [*per coroll. lemm.* 1. *sive ex lemm.* 11. ob indices *m*, *n* æquales, quibus dicta spatia proportionantur] apposito, aut dempto communi trilineo PaA, fiet spatium NAPan æquale PfOA ; sed PANQ ad PfOA, *per lemm.* 11. est, ut *m* ad *n*, sive, in hoc casu, ut *m* ad 1; ergo idem PANQ etiam ad NAPan erit, ut *m* ad 1 : sed etiam QRAN ad NAan est ut ratio duarum nD, DN, *per lemm.* 6. scilicet pariter ut *m* ad 1 (quia prima ratio semel accepta æquatur secundæ per *m* multiplicatæ, cùm ex hypothesi sit QD ad DN, ut $\overline{NA}^m$ ad $\overline{QP}^m$ vel $\overline{na}^m$, idest ut $\overline{nD}^m$ ad $\overline{DN}^m$) ergo & reliquum RAP ad reliquum AaP est in eadem ratione *m* ad 1. Quod erat &c.

COROLL. Hinc constat, dividendo in prima figura, esse RPa ad AaP, ut $m-1$ ad 1 : at in secunda figura, esse RPa ad AaP, ut $1-m$ ad 1; & RaP ad RPA in prima figura esse, ut $m-1$ ad m : at in secunda figura esse, ut $1-m$ ad m, unde si in primo casu *m* æquatur 2, vel in secundo *m* æquatur dimidio unitatis [hoc est sit exponens radicis quadratæ] patet, rectam Pa primæ figuræ, bifariam dividere trilineum ARP, & rectam RP secundæ figuræ, similiter bifariam secare trilineum AaP.

LEM-

LEMMA XIV. *Iisdem positis, ex bilineo R A P utrique hyperbolæ interiecto, magnitudinem data qualibet finita quantitate Z majorem secabimus.*



Sit primò numerus *m* maj r unitate, & tunc ducta quavis P*a* asymptoto DQ parallela, multiplicetur ratio *m* ad 1, usquedum æqualis, aut proximè major evadat ratione Z ad A P a; sitque ratio sic multiplicata eadem, quę producti ex numero *r* in *m*, idest *r m* ad 1. Tum ducta P R asymptoto D O parallela, agatur R G parallela D Q, deinde S G, S T, T V alternatim asymptotis parallelę, idque in tot punctis P, G, T continuetur, quoties multiplicata fuerit ratio *r m* ad 1 rationis *m* ad 1. Quia igitur spatium AVT ad spatium A P*a* rationem habet compositam ex intermediis rationibus, A V T ad A T S, A T S ad ASG, ASG ad AGR, AGR ad ARP, & ARP ad A P*a* (omnibus majoris inæqualitatis) quarum prima, tertia, & quinta (aliæque impari loco positæ si plures fuerint) æquantur semper *ex lemm.* 13. rationi *m* ad 1. quæ simul compositæ eandem rationem multiplicant juxta acceptum numerum punctorum P, G, T, adeoque ex se solis conflarent rationem *r m* ad 1. idest æqualem, aut proximè majorem ratione Z ad A P*a*, patet utique, rationem A V T ad A P*a*, quæ ex recensitis, & insuper ex secunda, quarta, aliisque pari loco positis componitur, longè majorem esse ratione Z ad A P*a*, ideoque spatium A V T multò majus fore proposito spatio Z.

Sin autem fuerit *m* [*ut in figura sequenti*] minor quàm 1, tunc ipsa P*a* ducatur parallela D O, & ratione 1 ad *m* vicissim multiplicata, usque dum fiat ratio *r* ad *m* æqualis, aut proximè major ratione Z ad A P*a*, continuetur

in

in totidem punctis flexilineū *a*PRGSTV ex lineis alternatim parallelis ad asymptotos, & eodem ratiocinio colligetur, spatium ATV ad AP*a* majorem rationem habere, quàm Z ad AP*a*, quia solæ rationes ATV ad ATS, nec non AGS ad AGR, & APR ad AP*a* [singulæ *ex lemm.* 13. æquales rationi 1 ad *m*] componerent rationem *r* ad *m*, multiplicatam scilicet ipsius 1 ad *m*, pro numero punctorum P, G, T; Quare constat, in hoc etiam casu, ex bilineo RAP secari posse spatium TAV majus qualibet finita magnitudine proposita Z. Quod erat &c.

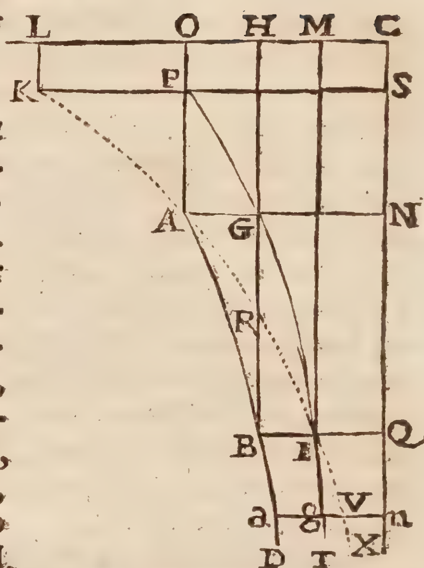


COROLL. Hinc patet, spatium, hyperbola Apolloniana ARV, & quavis alia APT interceptum, esse magnitudinis absolutè infinitæ, potest enim ad finitum spatiū AP*a* rationem habere majorem qualibet assignabili.



LEMMA XV. *Sit hyperbola Apolloniana AIV, & alia qualibet ABaD, cujus ordinatarū AN,* an *potestates, per numerum* m *(unitate majorem) denominatæ, reciprocè respondeant abscissis* nC, *NC: tum per sectionem quarumvis asymptoto parallelarum AO, BH, in punctis P, G, in qualibet assignabili ratione, putà* f *ad* 1, *fiat hyperbola PGT ipsi ABaD proportionaliter analoga. Dico, PGT convenire alicubi, velut in I, cum Apolloniana hy-*

na hyperbola AIV, & ulterius productam eam secare.



Ordinata PS occurrat Apollonianæ hyperbolæ in K, & ducta KL asymptoto parallela, fiat, ut $m - 1$ ad 1, ita quadrilineum hyperbolicũ OLKA ad OAIM, resectum pariter recta MI asymptoto CQ parallela; cùm igitur illud spatium ad hoc (*lemm. 6.*) sit, ut ratio duarum LC, CO, sive AO, OP, nempe f ad 1, ad rationem duarum OC, CM, erit, ut $m - 1$ ad 1, ita ratio f ad 1 ad rationem OC ad CM, & componendo, ut m ad 1, ita composita ratio ex f ad 1, & OC ad CM (nempe ratio fOC ad CM) ad ipsam rationem OC ad CM; unde productum extremorum æquabitur producto mediorum, idest posterior ratio multiplicata per m seu ratio $\overline{CO}^m$ ad $\overline{CM}^m$ æquabitur simplici rationi fCO ad CM, compositæ scilicet ex f ad 1, sive AO ad OP, & CO ad CM, aut IM ad AO, quæ duæ rationes constant rationem IM ad OP: sed ut $\overline{CO}^m$ ad $\overline{CM}^m$, ita ex natura curvæ PGT est etiam MI, quę ex M asymptoto CQ parallela usque ad curvam PGT ducitur, ad eandem OP; igitur eadem est IM ad Apollonianam, & MI ad hanc hyperbolam novissimè ductam; quare utraque hæc curva in puncto I conveniet; deinceps autem, $\overline{QI}^m$ ad $\overline{gn}^m$ [posita ng ordinata ad hanc hyperbolam PIT, nV verò ordinata ad Apollonianam ARV] seu nC ad CQ, vel QI ad nV, majorem habebit rationem, quàm QI ad gn, & ideò nV minor erit quàm ng, quare manifestum est, utramque curvam se invicem secare in I, & curvam PGI ex interiori

fieri

fieri exteriorem Apollonianæ hyperbolæ. Quod &c.

His positis, atque attentiùs perspectis, facillimè demonstrabitur pręcipuum nostrum

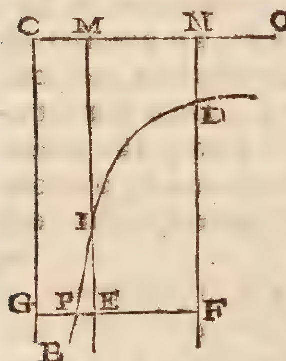
THEOREMA.

Cujuslibet hyperbolæ Apolloniana altioris, spatium asympoticum est Plusquam: Infinitum censendum.

Intelligatur ARIVX hyperbola Apollonii, & per idem punctum intra easdem asymptotos QCO descripta sit hyperbola quælibet, cujus ordinatarum AN, *an* potestas ab exponente *m*, qui major sit unitate, denominata, respondeat abscissis reciprocè acceptis *n*C, NC. Dico spatium *n*COABD, ad partes D infinitè productum, esse infinities majus spatio absolutè infinito Apollonianæ hyperbolæ *n*COARV æquè in infinitum producto; adeoque illud esse *Plusquam Infinitum*.

Assignetur enim quælibet ratio majoris inęqualitatis, *f* ad 1; & singulis asymptoto CQ parallelis AO, BH &c. in tali ratione sectis ad puncta P, G &c. ducta sit hyperbola PGT, priori ABD proportionaliter analoga, quæ [*lemm.* 15.] secabit Apollonianam hyperbolam alicubi, velut in I; bilineum autem VIT (*per coroll. lemm.* 14.) erit absolutè infinitum, adeoque infinities majus terminato spatio PGIRA; & apposito communi spatio *n*COPGIVX, fiet *n*COPGI*g*T absolutè majus spatio *n*COARIVX; & ideo spatium NCOAB*a*D majorem habebit rationem ad hoc secundum, quàm ad illud primum: sed ad illud (ob proportionalem singularum parallelarum OA, HB sectionem ad P, G in ratione *f* ad 1) est in assignabili quavis ratione *f* ad 1; ergo ad hoc secundum rationem habet majorem qualibet assignabili; infinities igitur ipsum superat, adeoque est *Plusquam Infinitum*. Quod erat demonstrandum.

Nunc ad scrupulos tuos excutiendos accedo. Illud in primis opponis, quomodo fieri possit, ut omne asymptoticum spatium, velut C N D I B, infinities minus asseri possit circumscripto parallelogrammo C N F, ut ego sæpius asserui: cùm tamen, si intelligatur Vas prismaticum datæ altitudinis ęqualis C N, basim habens ipsum asymptoticum spatium, aqua, vel alio fluido repleri, tum amota curva sponda D I B, permittatur aqua fluere usque ad spondam N F alteri C G parallelam, adeo ut adaptetur prismati,



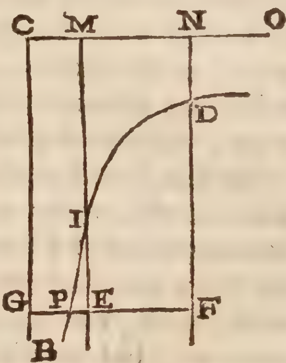
basim nunc habenti parallelogrammũ infinitè longum C N F, consequens videatur, ut ad aliquam altitudinem, si non æqualem priori, saltem in aliqua ad ipsam ratione assignabili, eadem aqua assurgat, ne dicere cogamur, infinitam molem aquæ vix sufficere ad madefaciendam dumtaxat infinitè longi parallelogrammi superficiem, nec tantam esse, ut supra fundum vasis C N F vel tantillum elevetur, quod absurdum ab omnibus censendum fore arbitraris. Ad hæc, si in parallelepipedum, super determinato quadrato C N in longitudinem infinitam erectum, aquam illam, quæ prius intra prisma finitæ altitudinis C N, sed infinitam asymptoticam aream pro basi obtinens, concludebatur, immissam concipiamus, utique ad infinitam altitudinem fore elevandam observas, adeoque congruere posse prismati, basim habenti infinitum parallelogrammum, finitam verò altitudinem; & sic non esse censendum asymptoticum spatium infinities minus parallelogrammo circumscripto. Postremò auctoritatem nescio, an rationem Cl. V. Galilæi obiicere identidem non prætermittis, quippe qui *Dial.* 1. *de nova scientia* non posse invicem comparari infinitas magnitudines, exemplo radicum, quadratorum,

torum, ac cuborum ex omnibus numeris selectorum evincit, unde vocabula majoris, minoris, & æqualis locum non habere in Infinitis statuit, eoque minùs admissurum hæc nostra *Plusquam Infinita* arbitraris, qui ne rationem quidem assignabilem in ejusdem generis Infinitis agnoscit: unde sæpius repetis, cavendum, ne mirum in modum hallucinemur, dum tam audacter infinitas quantitates, finitæ nostræ mentis captum excedentes, versare non dubitamus, ac de iisdem, perinde ac de finitis, per analyticos calculos, geometricos discursus, ac figurarum diagrammata, discurrere præsumimus.

Quibus hæc breviter posse reponi observo. Primò nihil absurdi esse, quòd aqua illa, quæ vas prismaticum asymptotale CNDIB implebat, applicata Vasi parallelepipedo super parallelogrammo CNF erecto, vix ejus fundum madefaciat, nec ad ullam finitam altitudinem à sua basi elevetur, sed tantùm ad infinitè parvam, adeout quàm infinities minus est spatium asymptoticum CNDIB circumscripto parallelogrammo CNF, tam infinities minor sit reciprocè altitudo, ad quam in hoc parallelepipedo assurget aqua, altitudine CN prioris prismatis, ut generatim in omnibus solidis æqualibus contingere necesse est: ac demum illud idem in hoc casu dicendum esse, quod quis diceret, si ex finito aliquo, quantumvis magno, aquarum receptaculo, puta ex toto occeano, effundi intelligeretur aqua in immensam planitiem, seu superficiem infinitam, cui adhærendo, certè non posset in ullam datam altitudinem elevari, sed illam vix humectaret: eodem quippe modo finitum occeani fundum se habet ad immensam planitiem, ut infinita area asymptotica ad circumscriptum parallelogrammum, quod illa ostenditur infinities maius.

Secundò, si aqua illa replens prismaticum Vas asymptotale, infunderetur parallelepipedo basim habenti datum

tum quadratum rectę CN, ſed interminatam altitudinem, utique intra illud ad altitudinem infinitam erigeretur, ſed tamen infinities minorem, quàm ſit longitudo ſpatii aſymptotici: nimirum ſi area aſymptotica fuerit hyperbolæ Apollonianæ, erit altitudo priſmatis æqualis infinito axi Logiſticæ, ſeu Logarithmicæ, ſubtangentem habentis æqualem ipſi NC lateri quadrati hyperbolico ſpatio inſcripti: nam ejuſmodi ſpatium aſymptoticum ſæpius oſtendimus æquari rectangulo ex dicta NC in axem præfatum Logiſticæ, ut quævis aſymptotici ſpatii terminata portio æquatur rectangulo ejuſdem NC in rectam axi Logiſticæ parallelam, ejuſque curvę, & aſymptoto hyperbolæ interpoſitam; Itaque cùm dicimus, ſpatia hujus generis aſymptotalia eſſe infinities minora rectangulo quovis infinitè longo, intelligendum eſt de longitudine æquè infinita, ac ſit longitudo dicti ſpatii: ſeu de rectangulo ipſi circumſcripto, & qualibet ejus parte proportionali, per ſubdiviſam illius latitudinem reſecta: non autem id aſſerimus de quovis infinito rectangulo indiſcriminatim. Vide Scholion I. ſubiectum *coroll. 2. prop. IX. pag. 59.* hujus tractatus.



Tertiò ad Galilæi ſive auctoritatem, ſive rationem, reſpondeo, me nullatenus dubitare, ſi viveret nunc temporis Vir Clariſſimus, & tot Illuſtrium Mathematicorum, qui hos diverſos infinitorum gradus mecum agnoſcunt, fundamenta perpenderet, inſignemque hujus doctrinæ uſum in geometricis, & phyſicis problematibus ſolvendis agnoſceret, aut eorum auctoritati & rationi ſuam liberè, & ſyncerè poſtpoſiturum, aut ſaltem fore, ut mirabilia hæc profundioris Geometriæ arcana, ſin minùs probaret, certè debita veneratione ſuſpiceret, eoque loco haberet, quo

ſua

ſua Paradoxa de puncto æquali peripheriæ, aliiſque hujuſmodi, habenda eſſe à cæteris Mathematicis voluit. Cæterùm, re maturiùs, atque attentiùs penſata, fortaſſe Vir Lynceus animadverteret, ex omnibus poſſibilibus numeris, nedum plures, ſed infinities plures eſſe radices, quàm quadratos; & adhuc infinities plures quadratos eſſe, quàm cubos, & ſubinde ſemper infinities minorem eſſe multitudinem altiorum poteſtatum: quemadmodum & facilè colligeret, omnium prorſus numerorum multitudinem eſſe duplam multitudinis imparium dumtaxat, vel dumtaxat parium numerorum; itemque eandem omnium numerorum multitudinem triplam eſſe illorum multitudinis, quos ternarius numerare poteſt; &c. Ad rationem verò dubitandi, an non totidem cenſendi ſint quadrati, aut cubi, quot radices &c. cùm cuilibet radici ſuum reſpondeat quadratum, & ſuus cubus: itemque an non totidem ſint omnes prorſus numeri, quot ſoli pares, aut ſoli illi, qui à ternario numerantur, cùm cuivis prorſus numero ſuus duplus (qui par eſt) poſſit aſſignari, itemque ſingulis correſpondeat ſuus triplus [quem ideò ternarius metitur] &c. ipſummet reſponſurum arbitror, hæc omnia falſa eſſe, ſi ad æqualem terminorum numerum cujuſvis generis numerorum ſeries prorogari intelligatur: ut enim ab 1 ad 10, vel ad 100, vel ad 1000. &c. ſemper falſum eſt tot eſſe radices, quot quadrata, quot cubi, quot pares numeri, quot à ternario numerati, etenim quos Galilæus ait aſſignari poſſe ſingulis radicibus quadratos, cubos, itemque duplos, & triplos &c. extra ſeriem acceptam exiſtere certum eſt: ita etiam ſi in multitudine majori qualibet data, juxta ejuſdem infinitatis progreſsum, numeri infiniti accipiantur, falſum erit, totidem in ipſis radices, quot quadratos, & cubos, & per binarium, & per ternarium diviſibiles poſse aſſignari, qui enim ſic correſponderent (præter paucos in acceptæ ſerie contentos) ultra terminum aſumptarum radicum

eum, extra progreſſionem, forent aſſumendi, quemadmodum ultra denarium excurrunt numeri quadrati, & cubi, & dupli, & tripli eorum qui ab 1 ad 10 computantur: & ultra centenarium ſunt qui ſimiliter reſpondent ſingulis numeris intra centenarium concluſis; atque ita deinceps; Itaque ratio non deeſt, cur crederemus, ipſummet Galilæum facilè [illegible]um, quòd infinita omnem æqualitatis, & [illegible] ac minoris, ipſamque altiorum gra[illegible] induere poſſint, neque ægrè laturum, ut [illegible] nobis à Deo Opt. Max. Infiniti ideam, quoad fieri poteſt, [illegible]duè contemplemur, ejuſdemque Auctoris noſtri infinitam eſſendi plenitudinem, immenſam, interminatam, incircumſcriptam, Sapientiæ, Potentiæ, Bonitatiſque magnitudinem, per hæc ænigmata, interim admirantes, dum paulatim ad deſpiciendas haſce finitas res & caducas animum erudientes, ad illud *Infinitorum, & Pluſquam Infinitorum omnium Maximum*, ſine extenſione immenſum, ſine ſucceſſione perpetuum, ſine multitudine infinitum, omnis extenſionis originem, omnis ſucceſſionis fontem, omnis infinitatis principium, evidentiori intuitu, facie ad faciem, aliquando perſcrutandum aſpiramus Hæc una jucundiſſima contemplatio, per interminabilis ævi ſeriem mentes noſtras jugiter occupabit, hæc una beatos efficiet: cur itaque dubitabimus hæc infinitatis noſtri Auctoris veſtigia, in admirandis operibus ſuis relicta, has ejus magnitudinis velut umbras, & ſpectra, nobis in his tenebris occurrentia, quoad licuerit, perſequi, ſiquam inde veritatis lucem eruentes, futuræ fœlicitatis ſpecimen aliquod prægustare poſſimus?

Quod porrò ex rerum finitarum propietatibus, et undique circumſcriptis figuris, de Infiniti natura, deque immenſis ſpatiis pronunciare non vereamur, id extra reprehenſionem eſse intelliges, ſi ex ipſis creaturis, utique finitis, exiguis, et limitatis, ad ejuſdem Creatoris noſtri,

Maxi-

Maximi, Infinitique notitiam ascendere nos debere animadvertas, & ex earum dotibus, quàmlibet imperfectis, summi Opificis infinitas perfectiones colligere, dum *Invisibilia Dei, per ea quæ facta sunt, intellecta conspiciuntur*, ut monuit Apostolus. Ad hæc: tibi ipsi, ac vulgo philosophorum potius cavendum est, ne te præjudicio aliquo falli permittas, dum ab Infinito Finitum omne toto genere distingui putas, ut alterum cum altero conferri nequeat; magnitudinum quippe finitarum divisibilitas in infinitum, tot physicis, & geometricis argumentis demonstrata, & apud sapientes omnes jam inconcussa, arguit ipsasmet ad quoddam Infiniti genus pariter pertinere, tametsi, quia nobis ordinariè tractandæ occurrunt, ab Infinitis secerni, & peculiari nomine Finitorum designari consueverint. Quævis materiæ particula, si doctissimum Leibnitzium audias, infinita est, non potestate dumtaxat, sed actu ipso, ut Scholæ loquuntur: en ejus verba ex Epistola ad D. Foucher Canonicum Divionensem in Diario Parisiensi 3. Augusti 1693. *Je suis tellement pour l' infini actuel, qu' au lieu d' admettre que la nature l' abhorre, comme l' on dit vulgairement, je tiens qu' elle l' affecte par tout, pour mieux marquer les perfections de son Auteur. Ainsi je crois qu' il n' y a aucune partie de la matiere, qui ne soit, je ne dis pas divisible, mais actuellement divisée; & par consequent la moindre particelle doit estre considerée comme un monde plein d' une infinité de creatures differentes.* Quæ si vera, aut veris similia censeantur, quis vetet imposterum de finitis magnitudinibus, perinde ac de infinitis, & è contrario de infinitis, perinde ac de finitis, discurrere, cùm uno genere uterque magnitudinum ordo veluti comprehendatur? Præterquamquod ipse nostrarum demonstrationum progressus apertè ostendit, debitas cautiones à nobis minime prætermissas, prout rerum ferebat conditio, cùm ex rationibus finitarum quantitatum, ad ipsas infinitas vel invicem, vel cum infinities majoribus, aut

minoribus comparandas gradum faceremus.

Cæterùm quæ mihi obiecisti Trevoltiensium Sociorum, qui monumenta Scientiarum, ac bonarum Artium perscribunt, testimonia, nostræ causæ non admodum officere judico. Ajunt illi artic. 33. mensium Maii, & Junii anni 1701 in recensione Methodi Jacobi Bernoullii ad determinandos evolutarum radios ,, *Analysim infinitè parvorum [juxta phrasim D. Hospitalii] in ipsiusmet Infiniti viscera penetrare, nec Infinitum dumtaxat complecti, sed Infinitum infiniti, aut etiam infinitorum Infinitatem: at optandum esse, ut ejusmodi Analysis, quam contendunt fęcunditate admirabili prędit am, tantam evidentiam secum afferret, quantam à Geometria jure expectamus: Sed cùm audiuntur differentes de Infinito, deque Infinito infiniti, ac de Infinito infinities infiniti, atque ita deinceps sine limite progrediendo, cùmque finitis magnitudinibus hæ infinitorum Infinitates applicantur, non semper contingit, eos quos erudire, atque ad aßensum cogere conantur, tanta ingenii vi præditos esse, quanta requireretur, ut in adeo profundis abyßis recondita mysteria discernere queant* ,, & infra sub finem ,, *Qui antiquis Geometrarum ratiociniis assueti sunt, nonnisi ęgrè ab iis se avelli patientur, ut tam abstractas methodos prosequantur: ac facilè malint non adeò longè progredi, quàm novas vias ingredi ad Infinitum infinities infiniti ducentes, in quibus non adeò claram circa se lucem semper aspicient, ac satis obvio aberrandi periculo se frequenter obnoxios sentient. Non sufficit in rebus geometricis rectè concludere, nisi & legitimam esse illationem evidenter nobis innotescat.* ,,

In quibus patet, non improbari quidem ipsammet infinitè parvorum Analysim, nec doctrinam infinities infinitorum, velut erroris suspectam, traduci, sed unum hoc querelæ subiectum esse, quòd non satis clarè, & evidenter ab hujus methodi cultoribus hæc omnia tradantur, sed magni alicujus mysterii ad instar, intricatioris calculi velo involuta proponi consueverint; quod fortasse in nostro

tra-

tractatu culpare non poterunt, in quo dilucidè, ut arbitror, atque ex severiori Geometrarum methodo demonstrata omnia deprehendent. In eam quippe sententiam & nos sponte concedimus, optandum esse, ut quæ per analyticum calculum inveniuntur, ad geometricam potius amussim exacta, si fieri potest, proponantur, quàm ut per symbola, multiplici præsertim exponentium gradu, & radicum implicatarum signis affęcta, implicentur, ex quibus non statim, uno velut intuitu, quemadmodum ex linearibus demonstrationibus, veritatem expositorum Theorematum Lector elicere potest, sed longum ejusdem calculi sibimet repetendi tędium subire cogitur, antequàm certam propositæ rei notitiam sibi compararet, non minori plerumque labore, quàm si ab initio eidem veritati ex integro per semetipsum indagandæ animum applicuisset.

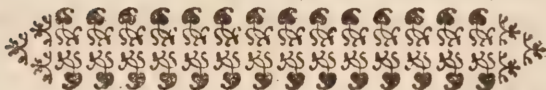
Hæc habui, quæ difficultatibus tuis pro nunc reponerem: siquid exinde lucis haurire poteris, ea fruere; siquid verò obscurius, præ argumenti ipsius conditione, dictum invenies, id quam primùm, sincera, qua invicem utimur, libertate indicare ne prætermittas, congruam ex me dilucidationem, suo tempore, reportaturus.

Vive, vale; & siquid novisti rectius istis,
Candidus imperti: si non, his utere mecum.

Dabam Aretii Kalendis Septembris MDCCIX.

„ DOMINUS REGNABIT IN ÆTERNUM, ET ULTRA „
Exod. cap. 15. *v.* 18.

FINIS.



AP-

APPROBATIONES.

De Mandato Reverendiss. Patris D. Alphonsi Cellini Abbatis Generalis totius Ordinis Camaldulensis, attente legi librum, qui inscribitur: *De Infinitis Infinitorum, & Infinitè parvorum ordinibus &c.* à P. D. Guidone Grando Monacho Camaldulensi Celebri Mathematico, & Pisanæ Universitatis Publico Philosophiæ Professore compositum, nihilque in eo tam Catholicæ Fidei, quàm bonis moribus dissonum inveni; quinimmò Opus profundioris Geometriæ meditationibus, Infiniti ipsius Naturam, æquè ac differentialis Calculi Methodum illustrantibus, refertum, & tanto Auctore dignum, & Mathematicæ Studiosis perutile futurum censeo, si typis mandetur.

Dat. Aretii in Monasterio S. Mariæ in Gradibus die 15. Septembris 1709.

D. Antonius Franciscus Caramelli S Theolog. Doctor, Abbas dicti Monasterii, & Visitator Camaldulensis.

Cum librum, cui titulus est: *De Infinitis Infinitorum, & Infinitè parvorum ordinibus*, a P. D. Guidone Grando Monacho nostro compositum recognoverit Reverendissimus P. D. Antonius Franciscus Caramelli Abbas Visitator (cui hoc ipsum commissum fuit) & censuerit in lucem edi posse, Nos facultatem Auctori præfato elargimur, ut eundem librum typis mandare valeat, si cęteris, ad quos spectat, videbitur. In quorum fidem has litteras manu nostra subscripas, ac Sigillo Nostro munitas dedimus.

Ex Monasterio Nostro SS. Hyppoliti, et Laurentii Faventię die 1. Octobris 1709.

D. Alphonsus Abbas Generalis Camald.

Locus ✠ Sigilli.

D. Marinus Miserochi Cancell. Camald.

IMPRIMATUR.

Frater Carolus Antonius Panni de Cremona Ord. Min. Conv. Vicarius Generalis Sanctæ Inquisitionis Pisarum.

Imprimatur Pisis.

Anton. Francisc. Palmerini V. Generalis.

NOBILISSIMO, ATQUE ERUDITISSIMO VIRO

HENRICO NEVVTON

POTENTISSIMÆ ANGLORUM REGINÆ,

Apud Regiam Celsitudinem COSMI III. M. *Ducis Etruriæ, nec non apud Serenissimam Genuensium Rempublicam,*

ABLEGATO.

GUIDO GRANDUS FELICITATEM.



Ncredibile sciendi desiderium, & inexplebilem, abstrusa quæque, magisque profunda rimandi, cupiditatem humanæ menti summus Nature Conditor indidit, ut ad Auctoris sui cognitionem, non solùm officii sui debito sollicitante, gratique etiam amoris stimulo urgente, sed ampliùs obiecti ipsius sublimitate ineffabili invitante, quodammodò excitaretur. Huic genio præ omnibus indulgentes, imò fræna laxantes, acutissimi, ac prestantissimi Mathematici, assiduo, & operoso studio in id maximè incubuerunt, ut ordine perspicuo rationis suæ vim gradatim promoventes, ex primis, planissimis, ac cuilibet facilè obviis veritatibus, quarum notitiam ab ipso Deo Opt. Max. nostris animis insertam accepimus, ad alias magis arduas detegendas sibi viam munirent, eo successu, quem pauci licèt pro merito intelligant, plerique tamen in dies sentiunt, & omnes jure mirantur. Nam, ut cetera omittam admiranda Theoremata, quæ se ab ipsis Geometriæ nascentis exordiis prodiderunt, velut de æqualibus triangulis, & parallelogrammis in eadem basi, atque in iisdem parallelis, ad quàmlibet dissitum intervallum obliquè excurrentibus: de spatiis quantumvis exiguis ad quamvis lineam applicandis, adeoque ad perimetrum majo-

rem quolibet dato redigendis &c. quæ nunc, ut nugas, & crepundia ætatis illius despicimus: manet adhuc inconcussa adversus omnem reluctantis imaginationis conatum, adversus inanes Scepticorum cavillationes, & Pseudophilosophorum impetus, priscis olim temporibus demonstrata, cujusvis magnitudinis infinita Divisibilitas: manet tam certa, & evidens, quam adhuc intellectui nostro incomprehensibilis, quæ ante omnem hominum memoriam olim detecta fuit, nonnullarum quantitatum Incommensurabilitas, quam siquis ignoraret, hunc non hominem, sed pecudem potius dicendum Plato censebat: manet adhuc numquam non celebranda, æquè ac semper stupenda illa Asymptotorum affectio, quam, adolescente jam Geometria, Conici Scriptores deprehenderunt, nunc autem Mathematici recentiores, non ad unam, aut alteram curvam, Hyperbolam scilicet Apollonii, & Conchoidem Nicomedis, dumtaxat restringi, sed innumeris prorsus novis lineis facillimæ descriptionis, nonnullis etiam antiquis eadem lege continuatis, ut Nicostrati Quadratici, & Dioclis Cissoidi, convenire demonstrarunt. Verùm hæc nulla sunt, si cum illa felici non minùs, quàm audaci Geometriæ, virilitatem suam jam adeptæ, aggressione conferantur, qua scilicet innumeros terminos in unam summam finitam colligere, immensæ longitudinis solida, & superficies, terminatæ, ac undique circumscriptæ sui generis areæ coequare, infinitarum quantitatum proportiones, & gradus distinguere, & infinitè parva magnitudinum elementa reperire, atque in varias classes distribuere docuit. Neque verò ad sterilem, & otiosam dumtaxat speculationem hæc pertinere, non et à externis hominum usibus, quibus civilis vita maximè indiget, inservire quis arbitretur: nulla quippe adeò abstracta, & ab omni materiæ commercio remota cognitio in Geometricis assignari potest, cui vel nunc, vel aliquando, fructus aliquis ex his, quæ apud vulgus in pretio esse solent, non sit referendus, sive inde per se ipsum pendeat, sive mediis aliis notitiis ejusdem, aut alterius Scientiæ, quam prior illa cognitio perfecerit. Profundioribus utique Geometriæ speculationibus, & abstrusioribus Analyticæ Calculis, tum Mechanicam, tum Opticam, tum Astronomiam, tum Nauticam, tum Geographiam, tum Architecturam, ac ceteras denique Scientias, & Artes, Reipublicæ commodis, & utilitatibus prospicientes, auctas hodie, locupletatas, & ad faciliorem methodum redactas accepimus, novisque semper incrementis, recentio-

tio-

tiorum Mathematicorum beneficio, magis ac magis in dies perficiendas speramus. Quocirca summa sollicitudine omnino curandum est, ut profundiores Geometrarum Theoriæ, quas persæ jucundissimas, & de universo hominum genere tam benè merentes experimur, assiduè promoveantur, habitoque inter veras, & (siquæ irrepserint) falsas delectu, his confutatis confirmentur illæ, atque ab obiectis fortasse scrupulis vindicentur. Hinc, cùm Clarissimi, inter præcipuos inclytæ Nationis tuæ Mathematicos, Joannis VVallisii PLUSQUAM-INFINITA spatia, quæ primus ipse inter hyperbolas infinitas altioris ordinis, summa cum omnium admiratione, detexit, à nonnullis Regiæ Parisiensis Academiæ Geometris nuper in dubium vocari, tum apertè reiici animadverterem, operæ pretium facturum me existimavi, si rem totam [quæ maximi est in scientiis nostris momenti, ob connexionem, quam cum methodo recentiorum Analystarum Scientia hæc Infiniti sortitur] iterum examini subiicerem, & ad lydium Geometriæ lapidem exigerem, de tam celebri controversia deliberaturus: cùmque VVallisii vestri partibus multiplex ab ipsa veritate suffragium accedere deprehendissem, irrogatam Viro gravissimo injuriam propulsandam, inustam immortali ejus Nomini labem abstergendam, ejusque doctrinam ab omni fallaciæ suspicione hoc libello purgandam, Te potissimùm hortatore, constitui. Novos addidit operi stimulos ipsamet Illustrissima Regalis Societas, à Serenissimo Rege Carolo II. ad naturales Scientias promovendas fundata, dum me, obscurum, ac peregrinum hominem, inter socios suos ultrò conscribendum censuit, measque, in Armachani Præsulis systema sonorum, speculationes, Illustrissimo Præside Isaac Nevvtono Equite aurato, Mathematicorum nostri seculi Principe, necnon Doctissimo Haulæo, in Universitate Oxoniensi Professore Astronomiæ Saviliano, summè probantibus, ejusdem Academiæ actis inseri, & inter philosophicas Transactiones edi mandavit: cui quidem honori, ut aliqua ex parte me gratum ostenderem, nihil opportunius, & huic proposito accomodatius occurrit, quàm si prelaudati VVallisii, qui Regiam ipsam Societatem tantoperè illustravit, famam ab illata calumnia defendendam hac Geometrica Disquisitione susciperem, quam, meo nomine, eidem Amplissimo Academicorum Cœtui communicandam, Tibi offero, Vir Illustrissime, atque Eruditissime, ut mei simul erga Te obsequii monumentum aliquod apud posteros

ma-

maneat, nulla temporis injuria intercidendum. Nihil attinet, ut in Virtutum tuarum, hoc qualecunque venerationis teſtimonium ſuo veluti jure exigentium, uberrimum campum excurrere orationem meam permittam, cum ipſo etenim præſentis Tractatus titulo ampliſſimi hujus argumenti fęcunditas decertaret, meque in ſpatia PLUSQUAM-INFINITA laudum tuarum abduceret, ac dolorem denique noſtrum, ex imminentis jacturæ timore conceptum refricaret, dùm à Prudentiſſima Regina, meritorum tuorum ſat conſcia, eximiis honoribus auctus in Patriam revocaris, omnium, quibus Eruditio, Doctrina, Facundia, Elegantia tua, cum ſumma Humanitate conjuncta, perſpecta eſt, amorem tecum, & deſideria ſimul aſportaturus. Unum igitur ſupereſt, ut Te, qua licet fiducia, ſupplex exorem, ad libellum hunc benigna, qua ſoles, fronte excipiendum, ejuſque Auctori, quibus ipſum dignaris, benevolentiæ, & gratiæ tuæ officia jugiter continuanda. Vale.

Piſis, Pridie Kal. Februarii MDCCX.

